Théorème « Produit vectoriel en composantes »

Soit $\vec{v}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^3$. Alors $\vec{v}\,x\,\vec{w}=\begin{pmatrix}v_2\cdot w_3-v_3\cdot w_2\\-(v_1\cdot w_3-v_3\cdot w_1)\\v_1\cdot w_2-v_2\cdot w_1\end{pmatrix}$

Démonstration

On écrit : $\vec{v}=v_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+v_2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+v_3\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=v_1\cdot\vec{i}+v_2\cdot\vec{j}+v_3\cdot\vec{k}$; de même $\vec{w}=w_1\cdot\vec{i}+w_2\cdot\vec{j}+w_3\cdot\vec{k}$

car [ARG 1: …...……………...……………………………………………..........….............…]

On a : $\vec{v}\,x\,\vec{w}=(v_1\cdot\vec{i}+v_2\cdot\vec{j}+v_3\cdot\vec{k})\,x\,(w_1\cdot\vec{i}+w_2\cdot\vec{j}+w_3\cdot\vec{k})$,

car [ARG 2: …...……………...……………………………………………..........….............…]

$$\begin{aligned}=&[(v_1\cdot\vec{i})\,x\,(w_1\cdot\vec{i})]+[(v_1\cdot\vec{i})\,x\,(w_2\cdot\vec{j})]+[(v_1\cdot\vec{i})\,x\,(w_3\cdot\vec{k})]\\&+[(v_2\cdot\vec{j})\,x\,(w_1\cdot\vec{i})]+[(v_2\cdot\vec{j})\,x\,(w_2\cdot\vec{j})]+[(v_2\cdot\vec{j})\,x\,(w_3\cdot\vec{k})]\\&+[(v_3\cdot\vec{k})\,x\,(w_1\cdot\vec{i})]+[(v_3\cdot\vec{k})\,x\,(w_2\cdot\vec{j})]+[(v_3\cdot\vec{k})\,x\,(w_3\cdot\vec{k})]\end{aligned}$$

car [ARG 3: …...……………..................………………………………………………...….......…]

$$\begin{aligned}=&[v_1w_1\cdot(\vec{i}\,x\,\vec{i})]+[v_1w_2\cdot(\vec{i}\,x\,\vec{j})]+[v_1w_3\cdot(\vec{i}\,x\,\vec{k})]\\&+[v_2w_1\cdot(\vec{j}\,x\,\vec{i})]+[v_2w_2\cdot(\vec{j}\,x\,\vec{j})]+[v_2w_3\cdot(\vec{j}\,x\,\vec{k})]\\&+[v_3w_1\cdot(\vec{k}\,x\,\vec{i})]+[v_3w_2\cdot(\vec{k}\,x\,\vec{j})]+[v_3w_3\cdot(\vec{k}\,x\,\vec{k})]\end{aligned}$$

car [ARG 4: …...……………..................………………………………………………...….......…]

$$\begin{aligned}=&[v_1w_1\cdot\vec{0}]+[v_1w_2\cdot\vec{k}]+[v_1w_3\cdot(-\vec{j})]\\&+[v_2w_1\cdot(-\vec{k})]+[v_2w_2\cdot\vec{0}]+[v_2w_3\cdot\vec{i}]\\&+[v_3w_1\cdot\vec{j}]+[v_3w_2\cdot(-\vec{i})]+[v_3w_3\cdot\vec{0}]\end{aligned}$$

car [ARG 5: …...……………..................………………………………………………...….......…]

$$=\vec{0}+(v_2w_3-v_3w_2)\vec{i}+\vec{0}+(v_3w_1-v_1w_3)\vec{j}+\vec{0}+(v_1w_2-v_2w_1)\vec{k}$$

car [ARG 6: …...……………..................………………………………………………...….......…]

$$=(v_2w_3-v_3w_2)\vec{i}+(v_3w_1-v_1w_3)\vec{j}+(v_1w_2-v_2w_1)\vec{k}$$

car [ARG 7: …...……………..................………………………………………………...….......…]

$$=(v_2 w_3 - v_3 w_2)\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+(v_3 w_1 - v_1 w_3)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+(v_1 w_2 - v_2 w_1)\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

car [ARG 8: …...………….................…………………………………………...…......…]

$$=\begin{pmatrix}v_2 w_3 - v_3 w_2\\ v_3 w_1 - v_1 w_3\\ v_1 w_2 - v_2 w_1\end{pmatrix}$$

car [ARG 9: …...………….................…………………………………………...…......…]

$$=\begin{pmatrix}v_2 w_3 - v_3 w_2\\ -(v_1 w_3 - v_3 w_1)\\ v_1 w_2 - v_2 w_1\end{pmatrix}$$

car [ARG 10: …...………….................…………………………………………...…......…]