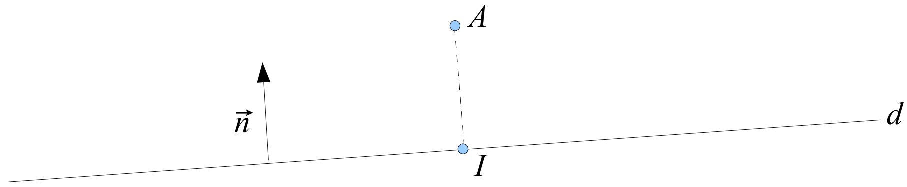
Théorème « Distance point-droite» (dans le plan)

Si *d* est une droite du plan d'équation (cartésienne) $ax+by+c=0$, $A(x_0;y_0)$ un point quelconque et δ la distance entre *A* et *d*, alors on a: $\delta=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Démonstration

Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ un vecteur normal à *d* et $I(i_1;i_2)$ le projeté orthogonal de *A* sur *d*.

Représenter la situation:



On a: $\overrightarrow{AI}=\lambda\vec{n}$ pour un certain λ inconnu appartenant à $\mathbb{R}$, car [ARG1: *les deux vecteurs sont orthogonaux à d, donc colinéaires*]

Nous allons déterminer la valeur de λ :

$$\overrightarrow{AI}=\lambda\vec{n}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}i_1-x_0\\i_2-y_0\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$, car [ARG 2: substitution et vect. entre 2 pts]

$$\Leftrightarrow\begin{cases}i_1-x_0&=&\lambda\cdot a\\i_2-y_0&=&\lambda\cdot b\end{cases}$$, car [ARG 3:mult. vect par un nbre et égalité des vecteurs]

$$\Leftrightarrow\begin{cases}i_1&=&x_0+\lambda\cdot a\\i_2&=&y_0+\lambda\cdot b\end{cases}$$, car [ARG 4:-x0 et -y0]

Les coordonnées $(i_1;i_2)$ de *I* vérifient l'équation de *d*, car [ARG5: *I appartient à d*]

donc:

$$a\,i_1+b\,i_2+c=0\Leftrightarrow a(x_0+\lambda\cdot a)+b(y_0+\lambda\cdot b)+c=0$$, car [ARG 6: substitution]

$$\Leftrightarrow a\,x_0+b\,y_0+c+\lambda(a^2+b^2)=0$$, car [ARG 7: calculs ...]

$$\Leftrightarrow\lambda=-\frac{a\,x_0+b\,y_0+c}{a^2+b^2}$$, car [ARG 8: division par a^2+b^2 (non nul)]

$$\overrightarrow{AI}=\lambda\vec{n}$$, car [ARG 9: voir début de la démo]

d'où:

$$=-\frac{a\,x_0+b\,y_0+c}{a^2+b^2}\vec{n}$$, car [ARG 10: substitution]

$$=-\frac{a\,x_0+b\,y_0+c}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$, car [ARG 11: substitution]

Mais la distance δ entre *A* et *I* est égale à la longueur du vecteur $\overrightarrow{AI}$,

car [ARG12: *déf. de la distance pt/droite*]

On en déduit que:

$$\delta = \left\| -\frac{a\,x_0 + b\,y_0 + c}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\|$$, car [ARG 13: déf. de la distance et de la norme]

$$= \left| -\frac{a\,x_0 + b\,y_0 + c}{a^2+b^2} \right| \cdot \left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\|$$, car [ARG 14: propriété de la norme (illustrer numériquement)]

$$= \left| \frac{a\,x_0 + b\,y_0 + c}{a^2+b^2} \right| \cdot \sqrt{a^2+b^2}$$, car [ARG 15: calcul de la norme]

$$= \frac{|a\,x_0 + b\,y_0 + c|}{a^2+b^2} \cdot \sqrt{a^2+b^2}$$, car [ARG 16:propriété de la val. absolue (illustrer numériquement)]

$$= \frac{|a\,x_0 + b\,y_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$, car [ARG 15:simplification par rac(a^2 + b^2) (non nul)]