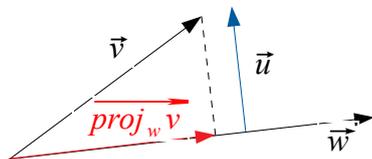


**Théorème « Vecteur projection » (dans le plan)**

Soient  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  deux vecteurs non nuls du plan. Alors on a:

a) le vecteur projection (orthogonale) de  $\vec{v}$  sur  $\vec{w}$  est  $\overrightarrow{proj_w v} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{w}\|^2} \cdot \vec{w}$

b)  $\|\overrightarrow{proj_w v}\| = \|\vec{v}\| |\cos(\alpha)|$ , où  $\alpha$  est l'angle entre  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$

**Démonstration**

a)  $\overrightarrow{proj_w v} = \lambda \cdot \vec{w}$ , car [ARG 1: ces deux vecteurs sont colinéaires]

mais aussi  $\vec{v} \cdot \vec{w} = (\overrightarrow{proj_w v} + \vec{u}) \cdot \vec{w}$ , car [ARG 2: déf. de la somme des vecteurs]

$$= \overrightarrow{proj_w v} \cdot \vec{w} + \vec{u} \cdot \vec{w}, \text{ car [ARG 3: propriété du pr.scalar]}$$

$$= \overrightarrow{proj_w v} \cdot \vec{w} + \vec{0}, \text{ car [ARG 4: } \vec{u} \text{ et } \vec{w} \text{ orthogonaux, et thm « orth. et pr.scalar. »]}$$

$$= (\lambda \cdot \vec{w}) \cdot \vec{w}, \text{ car [ARG 5: substitution]}$$

$$= \lambda \cdot (\vec{w} \cdot \vec{w}), \text{ car [ARG 6: propriété du pr.scalar]}$$

$$= \lambda \cdot \|\vec{w}\|^2, \text{ car [ARG 7: propriété du pr.scalar]}$$

d'où :  $\lambda = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}$ , car [ARG 8: division par  $\|\vec{w}\|^2$  (qui est non nul car  $\vec{w}$  non nul par hyp)]

on en déduit que :  $\overrightarrow{proj_w v} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{w}\|^2} \cdot \vec{w}$ , car [ARG 9: substitution]

b)  $\|\overrightarrow{proj_w v}\| = \left\| \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{w}\|^2} \cdot \vec{w} \right\|$ , car [ARG 10: cf a)]

$$= \frac{|\vec{v} \cdot \vec{w}|}{\|\vec{w}\|^2} \cdot \|\vec{w}\|, \text{ car [ARG 11: propriété de la norme]}$$

$$= \frac{|\vec{v} \cdot \vec{w}|}{\|\vec{w}\|^2} \cdot \|\vec{w}\|, \text{ car [ARG 12: propriété de la valeur absolue]}$$

$$= \frac{|\vec{v} \cdot \vec{w}|}{\|\vec{w}\|}, \text{ car [ARG 13: simplification – ok car } w \text{ non nul par hyp et propr. de la norme]}$$

$$= \frac{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\| |\cos(\alpha)|}{\|\vec{w}\|}, \text{ car [ARG 14 : déf produit scalaire]}$$

$$= \|\vec{v}\| |\cos(\alpha)|, \text{ car [ARG 15 : = arg13]}$$