

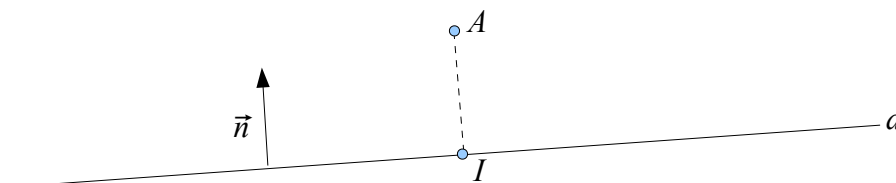
Théorème « Distance point-droite» (dans le plan)

Si d est une droite du plan d'équation (cartésienne) $ax+by+c=0$, $A(x_0; y_0)$ un point quelconque et δ la distance entre A et d , alors on a: $\delta = \frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Démonstration

Soit $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur normal à d et $I(i_1; i_2)$ le projeté orthogonal de A sur d .

Représenter la situation:



On a: $\vec{AI} = \lambda \vec{n}$ pour un certain λ inconnu appartenant à \mathbb{R} , car [ARG1:]

Nous allons déterminer la valeur de λ :

$$\begin{aligned} \vec{AI} = \lambda \vec{n} &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} i_1 - x_0 \\ i_2 - y_0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \text{ car [ARG2:.....]} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} i_1 - x_0 = \lambda \cdot a \\ i_2 - y_0 = \lambda \cdot b \end{cases}, \text{ car [ARG3:.....]} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} i_1 = x_0 + \lambda \cdot a \\ i_2 = y_0 + \lambda \cdot b \end{cases}, \text{ car [ARG4:.....]} \end{aligned}$$

Les coordonnées $(i_1; i_2)$ de I vérifient l'équation de d , car [ARG5:]

donc:

$$\begin{aligned} a i_1 + b i_2 + c = 0 &\Leftrightarrow a(x_0 + \lambda \cdot a) + b(y_0 + \lambda \cdot b) + c = 0, \text{ car [ARG6:.....]} \\ &\Leftrightarrow a x_0 + b y_0 + c + \lambda(a^2 + b^2) = 0, \text{ car [ARG7:.....]} \\ &\Leftrightarrow \lambda = -\frac{a x_0 + b y_0 + c}{a^2 + b^2}, \text{ car [ARG8:.....]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{AI} &= \lambda \vec{n}, \text{ car [ARG9:.....]} \\ &= -\frac{a x_0 + b y_0 + c}{a^2 + b^2} \vec{n}, \text{ car [ARG10:.....]} \\ \text{d'où:} & \\ &= -\frac{a x_0 + b y_0 + c}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \text{ car [ARG11:.....]} \end{aligned}$$

Mais la distance δ entre A et I est égale à la longueur du vecteur \vec{AI} ,

car [ARG12:]

On en déduit que:

$$\begin{aligned}
 \delta &= \left\| \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\|, \text{ car [ARG13:.....]} \\
 &= \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2} \right| \cdot \left\| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\|, \text{ car [ARG14:.....]} \\
 &= \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2} \right| \cdot \sqrt{a^2 + b^2}, \text{ car [ARG15:.....]} \\
 &= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2}, \text{ car [ARG16:.....]} \\
 &= \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \text{ car [ARG15:.....]}
 \end{aligned}$$