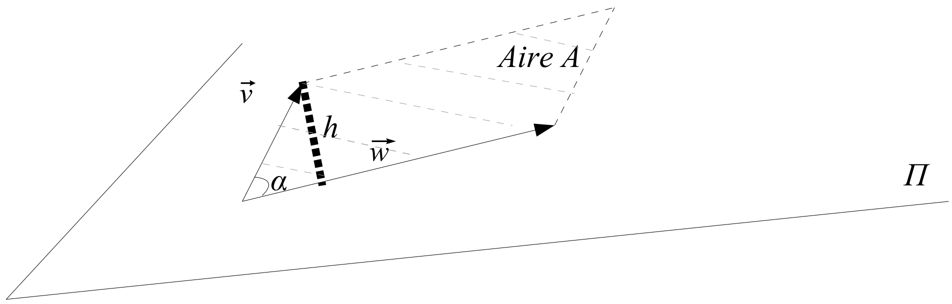
Théorème « Aire du parallélogramme »

Soit $\vec{v}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace $\mathbb{R}^3$. Alors l'aire du parallélogramme engendré par $\vec{v}$ et $\vec{w}$ est égale à $\|\vec{v}\,x\,\vec{w}\|$

Démonstration

Représenter la situation:



On a :

- Aire A = $\|\vec{w}\|h$, car [ARG 1: *calcul aire parallélogramme*]

- et $\sin(\alpha)=\frac{h}{\|\vec{v}\|}$, car [ARG 2: *définition du sinus dans le tr. rectangle]*

  donc $h=\sin(\alpha)\cdot\|\vec{v}\|$, car [ARG 3: *multiplication par* $\|\vec{v}\|$ *qui est non nul*]

on en déduit : Aire A = $\|\vec{w}\|\cdot\sin(\alpha)\cdot\|\vec{v}\|$, car [ARG 4: *substitution*]

$= \|\vec{v}\|\|\vec{w}\|\sin(\alpha)$

$= \|\vec{v}\,x\,w\|$, car [ARG 5 : *définition du pr. vectoriel*]

Remarque : on peut également représenter la situation dans le cas où $\alpha\in]90°;180°[$. La démonstration reste valable.