Théorème « Relation entre équation de *d* et vecteur normal à *d* »

a) Si d est une droite du plan d'équation (cartésienne) $ax + by + c = 0$ et qu'on considère le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, alors $\vec{n}$ est un vecteur normal à d.

b) Si $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à une droite d du plan et $A(x_0 ; y_0)$ un point quelconque de d, alors $ax + by - (ax_0 + by_0) = 0$ est une équation (cartésienne) de d

Démonstration

a) Soit $A(a_1 ; a_2)$ et $B(b_1 ; b_2)$ deux point de d. Il faut montrer que $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont perpendiculaires, car [ARG 1: …...................................]

On a :

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix} \text{, car [ARG 2:............................]}$$
$$= a(b_1 - a_1) + b(b_2 - a_2) \text{, car [ARG 3:............................]}$$
$$= a\,b_1 + b\,b_2 - (a\,a_1 + b\,a_2)$$

Or on sait que $a\,b_1 + b\,b_2 + c = 0$ et $a\,a_1 + b\,a_2 + c = 0$,

car [ARG 4: …...........................…………………………………………….……......…]

donc que $a\,b_1 + b\,b_2 = -c$ et $a\,a_1 + b\,a_2 = -c$, car [ARG 5: …...………………......…]

donc $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = -c - (-c)$, car [ARG 6:..]

c'est-à-dire $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$

donc $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont perpendiculaires, car [ARG 7: …...................................]

b) Soit $M(x ; y)$ un point quelconque de d.

On a: $\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$, car [ARG 8 : …...................................]

d'où:

$$\overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0 \text{, car [ARG 9 :............................]}$$
$$\Leftrightarrow (x - x_0)a + (y - y_0)b = 0 \text{, car [ARG 10 :............................]}$$
$$\Leftrightarrow ax + by - (a\,x_0 + b\,y_0) = 0$$