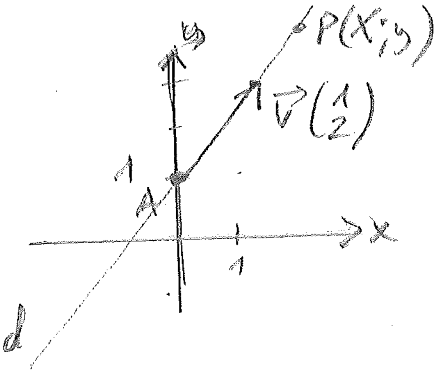
ex 29



Soit $P(x;y) \in d$:

$P \in d \iff \vec{AP} = \lambda \vec{v}$ avec un $\lambda \in \mathbb{R}$

$\iff \begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ éq. vectorielle

$\iff \begin{cases} x = \lambda \\ y-1 = 2\lambda \end{cases}$ syst. éq. paramétriques

Résoudre le système :

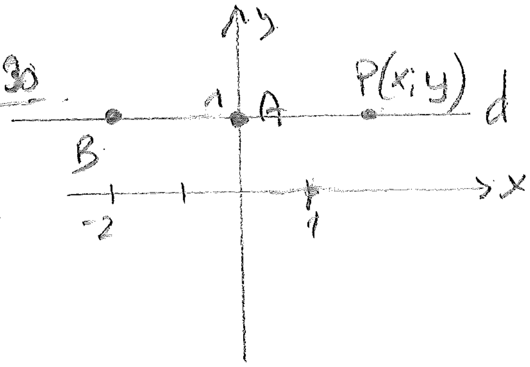
$\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \begin{cases} x = \lambda \\ y-1 = 2\lambda \end{cases} \left| \begin{array}{c} -2 \\ 1 \end{array} \right|$

$\iff \begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \begin{cases} -2x = -2\lambda \\ y-1 = 2\lambda \end{cases}$

$+$

$-2x + y - 1 = 0$: équation cartésienne de d

ex 30



un vecteur directeur de d : $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -2-0 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$P \in d \iff \vec{AP} = \lambda \vec{AB}$

$\iff \begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ éq. vectorielle

$\iff \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\lambda \\ 0 \end{pmatrix}$

Résoudre le système : $\begin{array}{l} (1) \\ (2) \end{array} \begin{cases} x = -2\lambda \\ y-1 = 0 \end{cases}$ syst. d'éq. paramétriques

(2) donne immédiatement $y-1=0$

$y = 1$ éq. cart

Remarque : en voyant la repr. graphique, on voyait directement l'éq. cartésienne de d : $y = 1$!

ex **31**

a) $\vec{AB}\begin{pmatrix}3-12\\2-(-5)\\1/2-(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9\\7\\3,5\end{pmatrix}$

$\vec{AC}\begin{pmatrix}0-12\\0-(-5)\\-7-(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12\\5\\-4\end{pmatrix}$

$\vec{AB} \neq k\vec{AC}$ ✓

éq. vect : soit $P(x;y;z) \in \pi$: $\vec{AP} = \lambda\vec{AB} + \mu\vec{AC}$

$$\begin{pmatrix}x-12\\y-(-5)\\z-(-3)\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}-9\\7\\3,5\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-12\\5\\-4\end{pmatrix}$$

éq. cart :
$$\begin{cases}(1)\ x-12=-9\lambda-12\mu\\(2)\ y+5=7\lambda+5\mu\\(3)\ z+3=3,5\lambda-4\mu\end{cases}$$

$$\begin{array}{ll}7\cdot(1) & 7x-84=-63\lambda-84\mu\\18\cdot(3) & 18z+54=63\lambda-72\mu\\\hline(4) & 7x+18z-30=-156\mu\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}7\cdot(1) & 7x-84=-63\lambda-84\mu\\9\cdot(2) & 9y+45=63\lambda+45\mu\\\hline(5) & 7x+9y-39=-39\mu\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}(4) & 7x+18z-30=-156\mu\\(-4)(5) & -28x-36y+156=+156\mu\\\hline & [\ -21x-36y+18z+126=0\ ]\end{array}$$

Vérif : $A \overset{?}{\in} \pi$: $-21\cdot12-36(-5)+18(-3)+126 \overset{?}{=} 0$ ✓

$B \overset{?}{\in} \pi$: $-21\cdot3-36\cdot2+18(\frac{1}{2})+126 \overset{?}{=} 0$ ✓

$C \overset{?}{\in} \pi$: $0+0-7\cdot18+126 \overset{?}{=} 0$ ✓

b) $\vec{AB}\begin{pmatrix}3-2\\4-0\\1-(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}$

$\vec{AC}\begin{pmatrix}-1-2\\-1-0\\0-(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-1\\2\end{pmatrix}$

$\vec{AB} \neq k\vec{AC}$ ✓

éq. vect : $P \in \pi \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-2\\y-0\\z-(-2)\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-3\\-1\\2\end{pmatrix}$

éq. cart : $\begin{cases} ① \; x-2 = \lambda - 3\mu \\ ② \; y = 4\lambda - \mu \\ ③ \; z+2 = 3\lambda + 2\mu \end{cases}$

$$\begin{array}{rl} ① & x-2 = \lambda - 3\mu \\ -3.② & -3y = -12\lambda + 3\mu \\ \hline ④ & x-3y-2 = -11\lambda \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 2.② & 2y = 8\lambda - 2\mu \\ ③ & z+2 = 3\lambda + 2\mu \\ \hline & 2y+z+2 = 11\lambda \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} ④ & x-3y-2 = -11\lambda \\ ⑤ & 2y+z+2 = 11\lambda \\ \hline & [\; x-y+z=0 \;] \end{array}$$

Vérif : $A \overset{?}{\in} \pi$: $2-0+(-2) \overset{?}{=} 0$ ✓

$B \overset{?}{\in} \pi$: $3-4+1 \overset{?}{=} 0$ ✓

$C \overset{?}{\in} \pi$: $\cancel{1}-(-1)+0 \overset{?}{=} 0$ ✓

c) $\vec{AB}\begin{pmatrix} 3-4 \\ 5-5 \\ 7-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{AC}\begin{pmatrix} 10-4 \\ 5-5 \\ 1-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\Big\}$ $\vec{AB} \neq k\vec{AC}$ ✓

éq. vect. : $P(x;y;z) \in \pi \Leftrightarrow \vec{AP} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{AC}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-4 \\ y-5 \\ z-6 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

éq. cart. : $\begin{cases} ① \; x-4 = -\lambda + 6\mu \\ ② \; y-5 = 0 \\ ③ \; z-6 = \lambda - 5\mu \end{cases}$

l'équation est déjà là ! ② $y-5=0$

càd $[\; 0.x + y + 0z - 5 = 0 \;]$

vérif immédiate : $A, B, C \in \pi$ ✓

d) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3-(-3) \\ -4-2 \\ 20-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 15 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0-(-3) \\ 0-2 \\ 10-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} \neq k\,\overrightarrow{AC}$ ✓

<u>éq. vect :</u> $P(x;y;z) \in \Pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-(-3) \\ y-2 \\ z-5 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 15 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

<u>éq. cart :</u>
$$\begin{cases} ① & x+3 = 6\lambda + 3\mu \\ ② & y-2 = -6\lambda - 2\mu \\ ③ & z-5 = 15\lambda + 5\mu \end{cases}$$

$$\begin{array}{rl} ① & x+3 = 6\lambda + 3\mu \\ ② & y-2 = -6\lambda - 2\mu \\ \hline & x+y+1 = \mu \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 5\cdot② & 5y-10 = -30\lambda - 10\mu \\ 2\cdot③ & 2z-10 = 30\lambda + 10\mu \\ \hline & 5y+2z-20 = 0 \end{array}$$

On obtient l'équation de Π

<u>vérif :</u>
$A \overset{?}{\in} \Pi$: $5(2)+2(5)-20 = 0$ ✓
$B \overset{?}{\in} \Pi$: $5(-4)+2\cdot 20-20 = 0$ ✓
$C \overset{?}{\in} \Pi$: $5(0)+2\cdot 10-20 = 0$ ✓

ex 32

$P(x;y;z) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = \lambda \vec{v}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \\ z-3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ép. vectorielle de d

$\Leftrightarrow \begin{cases} ① \; x+2 = 2\lambda \\ ② \; y-1 = \lambda \\ ③ \; z-3 = -\lambda \end{cases}$ Syst. éq. paramétriques de d

$\begin{cases} ① \; \dfrac{x+2}{2} = \lambda \\ ② \; y-1 = \lambda \\ ③ \; \dfrac{z-3}{-1} = \lambda \end{cases}$ d'où $\lambda = \left[\dfrac{x+2}{2} = y-1 = -z+3 \right]$

$\boxed{x+2 = 2y \text{ et } y+z = 4}$ ép. cart de d

ex 33

$P(x;y;z) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \\ z-0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ ép. vect de d

$\Leftrightarrow \begin{cases} ① \; x = -2\lambda \\ ② \; y-1 = 0 \\ ③ \; z = 3\lambda \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} ① \; -\dfrac{x}{2} = \lambda \\ ② \; y-1 = 0 \\ ③ \; \dfrac{z}{3} = \lambda \end{cases}$ d'où $\lambda = \left[-\dfrac{x}{2} = \dfrac{z}{3} \right]$ et $y = 1$

$\boxed{-3x = 2z \text{ et } y = 1}$ ép. cart de d

<u>ex34</u> $A(6;-10;-8) \Rightarrow \begin{pmatrix} 6-5 \\ -10-2 \\ 8-3 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = -\lambda \\ -12 = 3\lambda \\ 5 = 3\lambda \end{cases}$ λ pas identiques donc $A \notin d$

$B(3;8;9) \Rightarrow \begin{pmatrix} 3-5 \\ 8-2 \\ 9-3 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 = -\lambda \\ 6 = 3\lambda \\ 6 = 3\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = 2$ donc $B \in d$

<u>ex35</u> $d: \begin{pmatrix} x-6 \\ y-14 \\ z+3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ d'où $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix}$ vect. directeur de d

et $A(6;14;-3) \in d$

a) donc d est parallèle à tout vecteur de la forme $\lambda \vec{v}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$

b) $A \in d$; on choisit $\lambda = 1$: $\begin{cases} x-6 = 2\cdot 1 \\ y-14 = 7\cdot 1 \\ z+3 = 3\cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 21 \\ z = 0 \end{cases}$ donc $C(8;21;0) \in d$

c) $\begin{cases} x-6 = 2\lambda \\ y-14 = 7\lambda \\ z+3 = 3\lambda \end{cases}$ syst éq. paramé de d

$\Leftrightarrow \lambda = \left[\dfrac{x-6}{2} = \dfrac{y-14}{7} = \dfrac{z+3}{3}\right]$ 2 éq cart de d