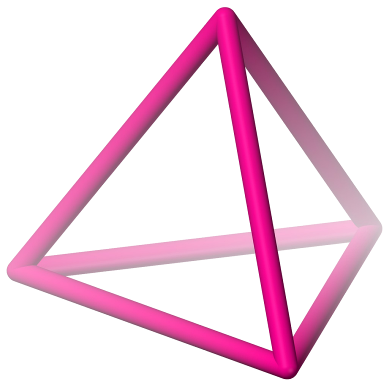
Numéro de la dernière page : 10

Titre : *Le volume d'une pyramide et le calcul intégral*



Degrés : 3e - 4e du Collège

Durée : 90 minutes

Résumé : Sans outils mathématiques avancés, à savoir le calcul intégral, il n'est pas possible de démontrer que la formule du volume d'une pyramide à base quelconque est égale à l'aire de sa base multipliée par sa hauteur, le tout divisé par 3. Même pour la plus simple pyramide, le tétraèdre régulier, ce facteur un tiers est difficile à présenter.

Le but de cette activité est d'en découvrir une preuve via un découpage intelligent du tétraèdre en solides plus petits.

Ceci peut être aussi une activité introductive au calcul de volume via le calcul intégral.

Le volume d'une pyramide et le calcul intégral

Un puzzle à deux pièces :

1) A l'aide de deux pièces construites à l'aide du patron de l'annexe 2, pouvez-vous construire un tétraèdre régulier, c'est à dire une pyramide à base triangulaire dont toutes les face (et la base) sont des triangles équilatéraux?

Un puzzle à quatre pièces

2) A l'aide des quatre pièces construites à l'aide du patron de l'annexe 3, pouvez-vous construire un tétraèdre régulier?
3) Pouvez-vous en déduire le volume d'un tétraèdre régulier ?

La formule générale

4) A l'aide du calcul intégral, calculer le volume d'une pyramide à base triangulaire dont la base à une aire A et une hauteur h.
   Question subsidiaire : quel est le rapport d'aires entre deux triangles semblables de rapport k ?

5) A l'aide du calcul intégral, calculer le volume d'une forme pyramidale générale (éventuellement seulement à base polygonale) dont la base à une aire A et une hauteur h.

Canevas

Le volume d'une pyramide

Degré(s) concerné(s) (+ filière(s)) 9eme à 11eme et première collège.

Prérequis (+ références au PER)
- Connaître la formule de l'aire de certaines surfaces et celles du volume d'un cube, d'un parallélépipède rectangle et d'un prisme (même non droit).
- Calcul intégral pour la formule générale.

Objectifs (+ références au PER)

- Etablir pour deux types de pyramides, la formule
  Volume = base • hauteur /3.
- Introduire une résolution algébrique dans un contexte inhabituel.
- S'approprier et énoncer explicitement la propriété d'additivité du volume.

Matériel :

- Trois pyramides à base carrés non régulières construites suivant le patron (Annexe 1) à imprimer sur du papier cartonné (entre 120 et 300 gr/m^2)
- Deux moitiés de tétraèdres réguliers construits en carton suivant les patrons (Annexe 2).
- Deux prismes à base triangulaire et deux tétraèdres réguliers en carton suivant les patrons (Annexe 3)
- Un paquet de cartes
- éventuellement des cubes (par exemple des dés) de même taille (au minimum 8, même s'il vaut mieux en avoir plus pour ne pas induire la réponse).

Matériel : Truc et astuce : Pour obtenir un pli précis, on peut marquer le trait en passant avec une pointe (pointe sèche, ciseau fermés, stylo fermé, trombone déplié etc...) sur le pli avant d'effectuer la pliure.

Durée estimée : 45 minutes si les élèves n'ont pas à construire leurs modèles en carton.

Proposition de déroulement.

Commencer par proposer les trois pyramides à base carrée à un élève, pour qu'il essaie d'en faire un cube.

Se convaincre ensemble que ces trois pyramides sont isométriques et de même volume que la pyramide régulière de même base et de même hauteur, en se convainquant que les coupes horizontales sont isométriques.

En déduire que le volume de la pyramide ayant hauteur et côté de la base égales à c vaut $\frac{c^3}{3}$. Ceci permet de voir apparaître le facteur un tiers. Chacun d'eux devrait d'ailleurs déjà avoir vu la formule une fois.

Leur proposer les questions sur le tétraèdre régulier pour un travail en groupe (si on a fait construire les formes au préalable, sinon il faut les faire construire sur place).

L'exemple du paquet de cartes permettant de suggérer que le volume de deux prismes de même base et de même hauteur est une bon rappel de la notion d'intégrale, il est possible de le signaler à ce moment. Cela met aussi les élèves en conditions pour les questions 4) et 5).

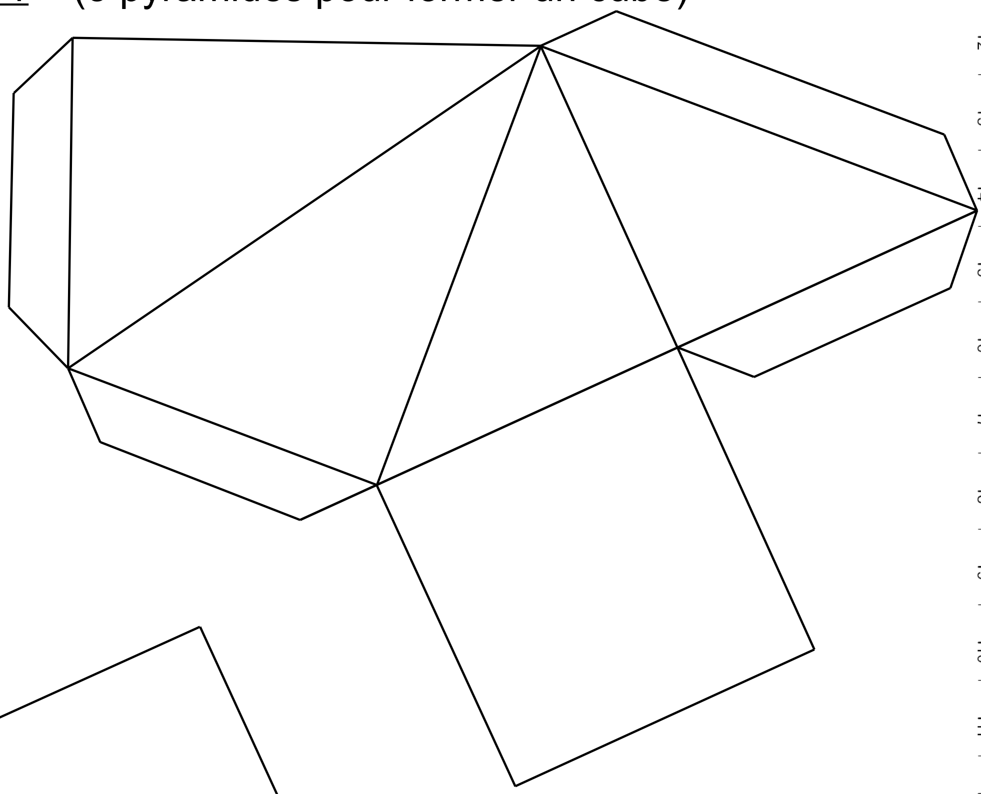
Il n'est pas clair que même à leur âge les étudiants pensent à écrire une équation pour répondre à la question 3). Il faudrait l'induire si ce n'est pas le cas.

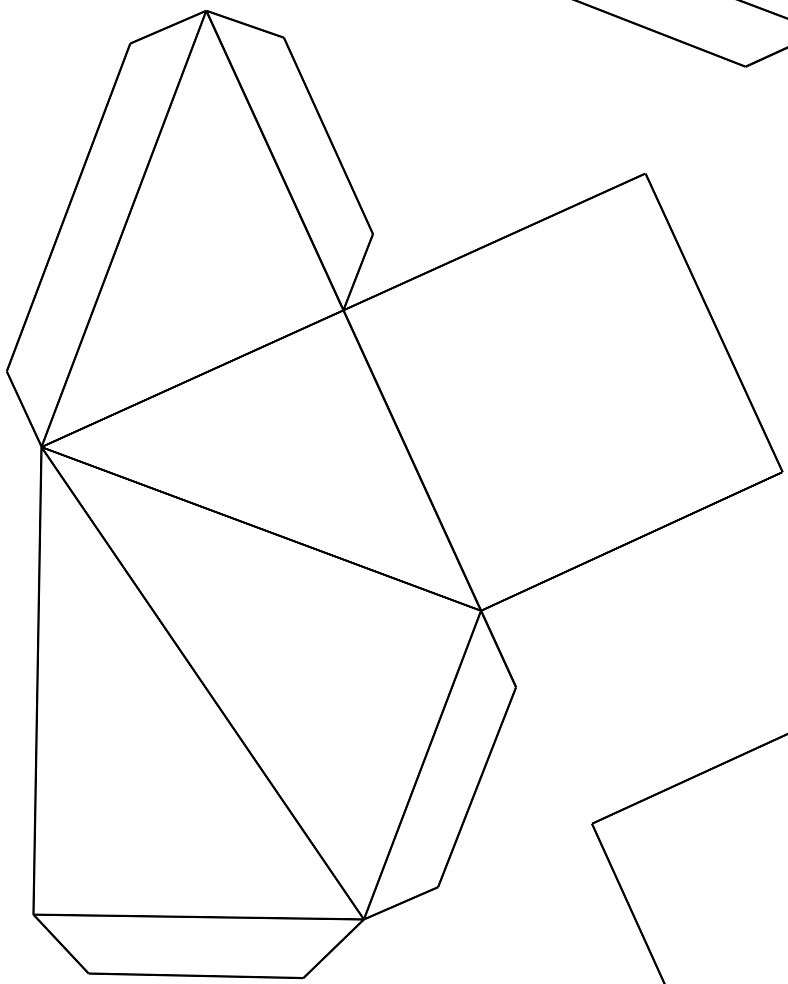
Le passge au cas général devrait rappeler aux étudiants des calculs de volumes de révolutions, s'ils l'ont déjà fait. Si non reprendre l'idée du paquet de cartes, pour mettre en évidence la « découpe par tranches ».

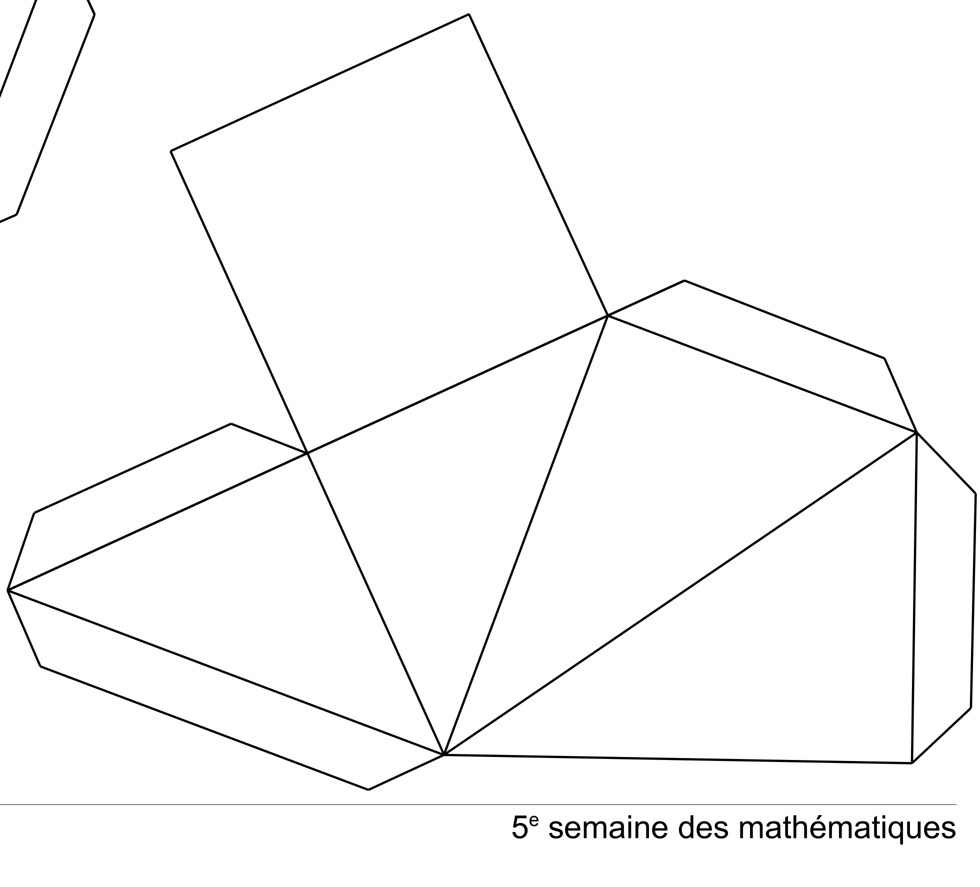
Variantes et/ou développements possibles :
On peut passer plus de temps sur le puzzle à deux pièces en imaginant comment construire cette découpe partant d'un tétraèdre et pour démontrer (ou faire démontrer) aux élèves que les faces à quatre côtés de chacune des pièces sont en fait des carrés. Ceci permet donc de se convaincre de la validité du puzzle.

Pour permettre aux élèves de s'approprier la formule du prisme l'utilisation d'un paquet de cartes est efficace pour montrer l'invariance du volume et de la hauteur relativement à l'inclinaison du prisme. Le volume des cartes d'un paquet ne change pas si celui-ci est penché ou bien vertical (additivité du volume) et la hauteur correspond bien à l'épaisseur des cartes multipliée par le nombre de cartes du paquet.

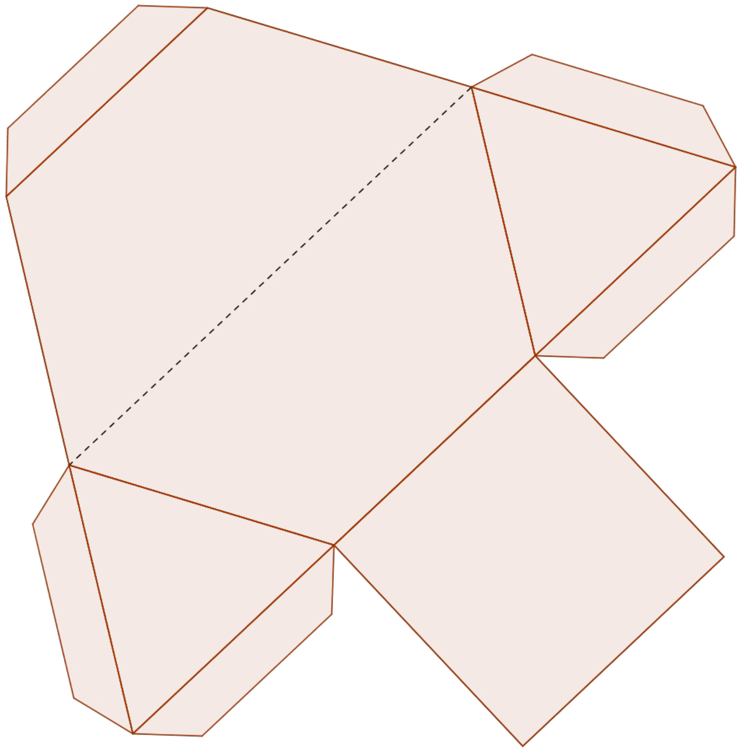
<u>Annexe 1</u> <u>Annexe 1</u> (3 pyramides pour former un cube)

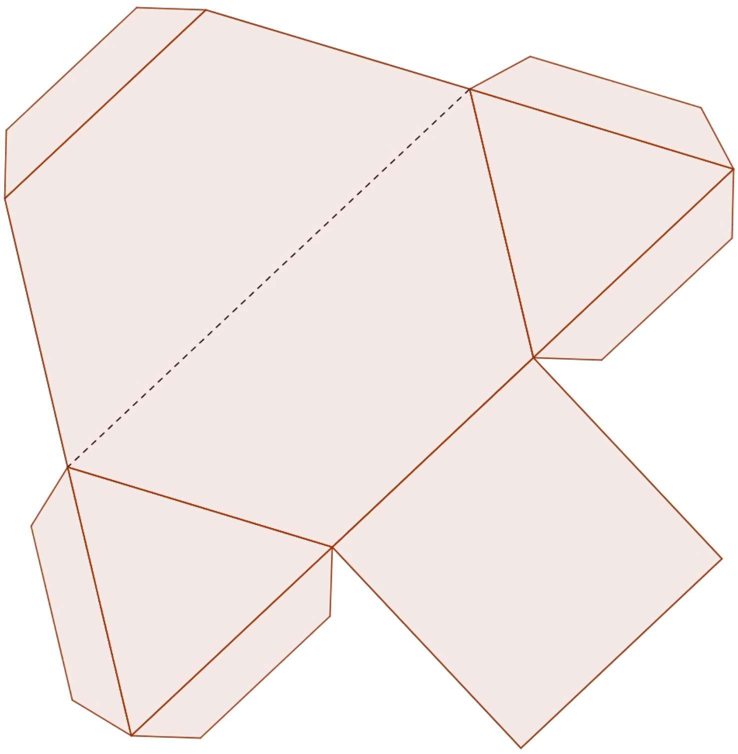


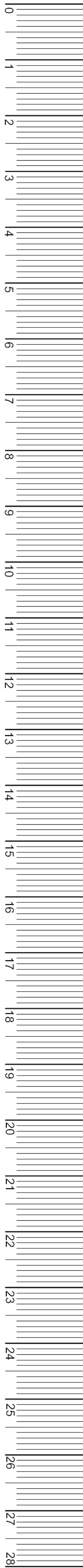




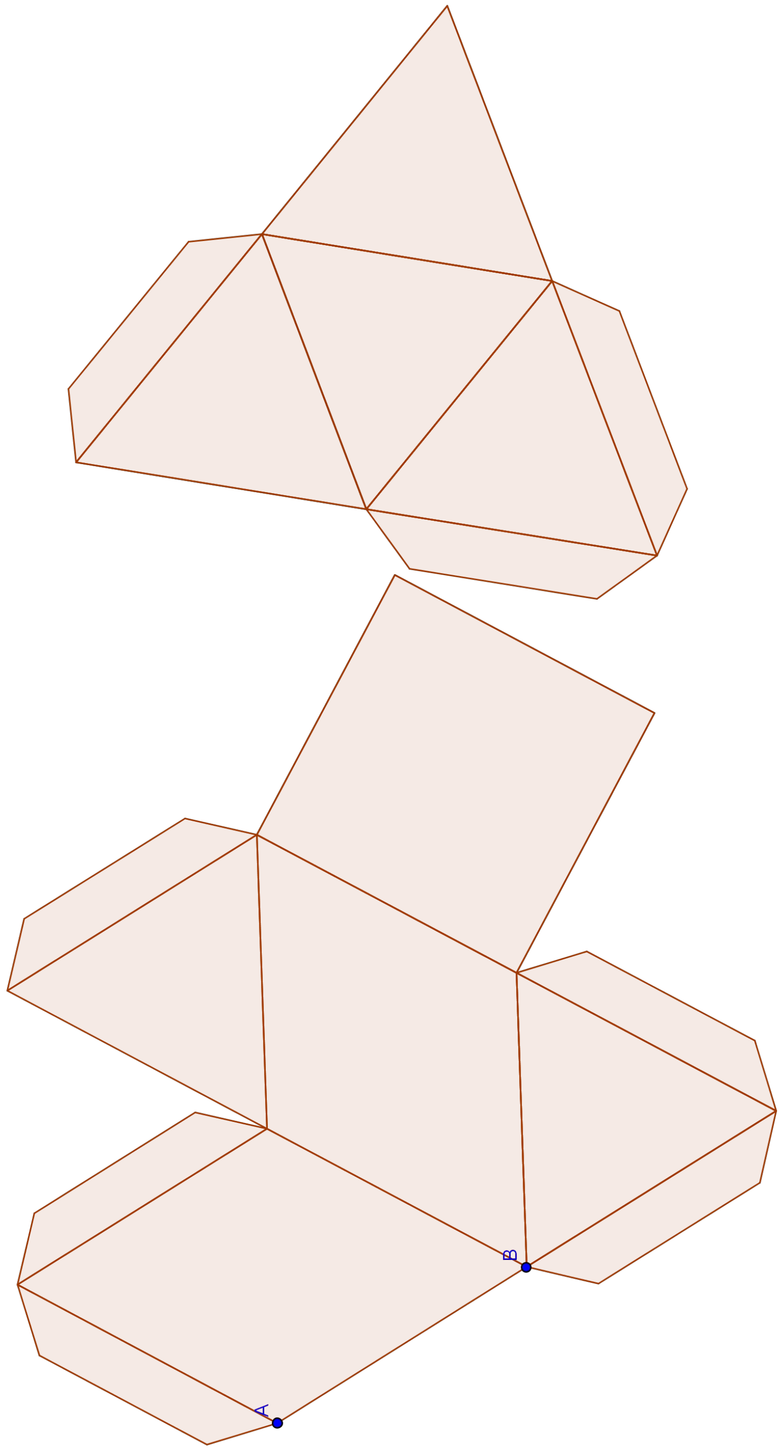
Annexe 2







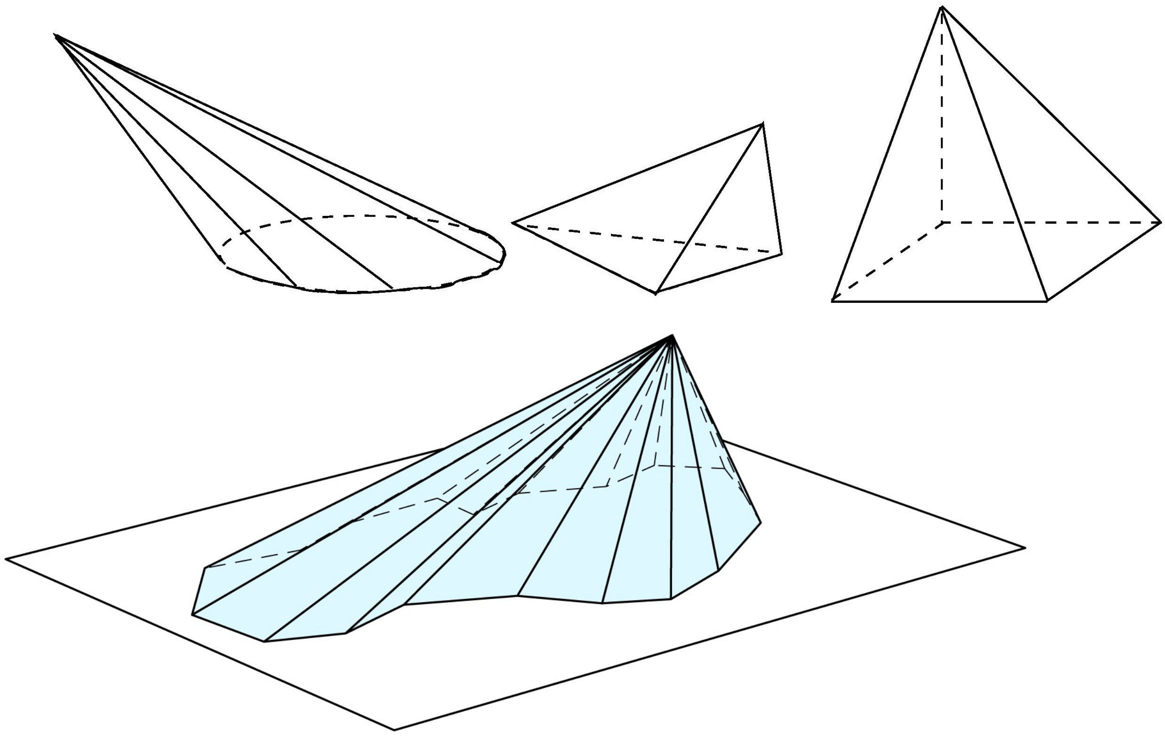
Annexe 3 : (2 fois)



Résolution

Comment démontrer que le volume d'un tétraèdre régulier est donné par la formule :
Volume = base • hauteur /3. ?

Parmi les formules décrivant le volume de forme simple, la première qui pose un vrai problème semble être celle d'objet de type pyramide. C'est-à-dire un objet constitué de tous les segments de droite reliant tout point d'une base plane donnée à un sommet donné (souvent supposé hors du plan contenant la base).

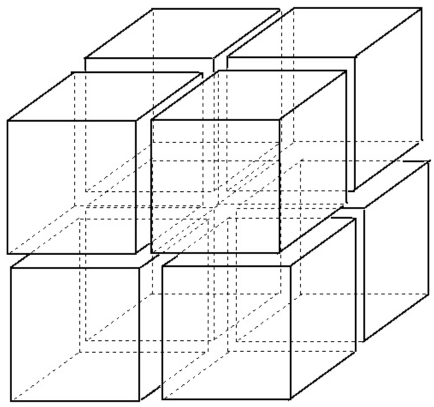


Pour ce type d'objet, la formule est toujours la même :

Volume = base x hauteur /3.

Mais s'il existe une décomposition d'un cube en trois pyramides identiques à base carrée, il n'existe aucune décomposition d'un tétraèdre régulier vers un cube. La preuve de cette formule pour le tétraèdre régulier (n'utilisant pas le calcul intégral) est donc particulièrement intéressante.

Cette preuve est due à Eudoxe (voir à ce sujet l'excellent article de Jean Itard référence : Revue d'histoire des sciences et de leurs applications. 1950, Tome 3 n°3. pp. 210-213). Elle admet Un principe d'homogénéité, ainsi qu'une version élémentaire du principe de Cavalieri.



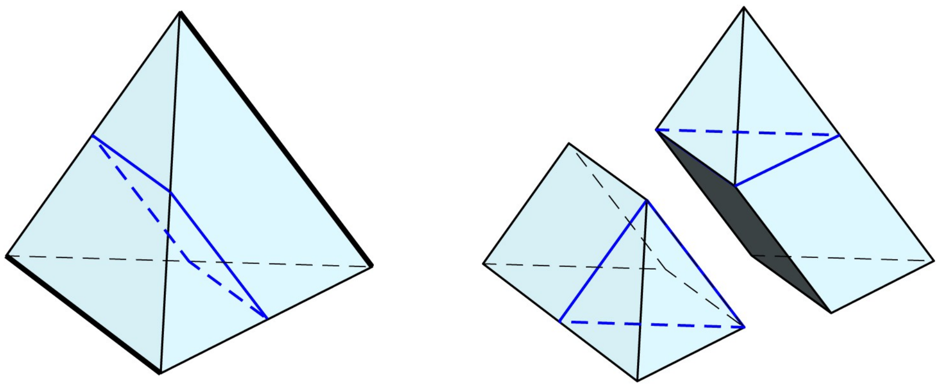
Eudoxe admet que si pour deux solides S_1 et S_2 (disons par exemple un tétraèdre et un cube), on considère deux autres solides S_3 et S_4 (disons un tétraèdre et un cube deux fois plus grand) qui sont des homothétiques des deux premiers de même rapport d'homothétie λ, alors le rapport des volumes $V(S_1)/ V(S_2)$ est égal au rapport $V(S_3)/ V(S_4)$.

Ceci permet de déduire que le rapport entre un solide S_1 et S_3 son homothétique de rapport λ, le rapport des volumes $V(S_3)/ V(S_1) = \lambda^3$.

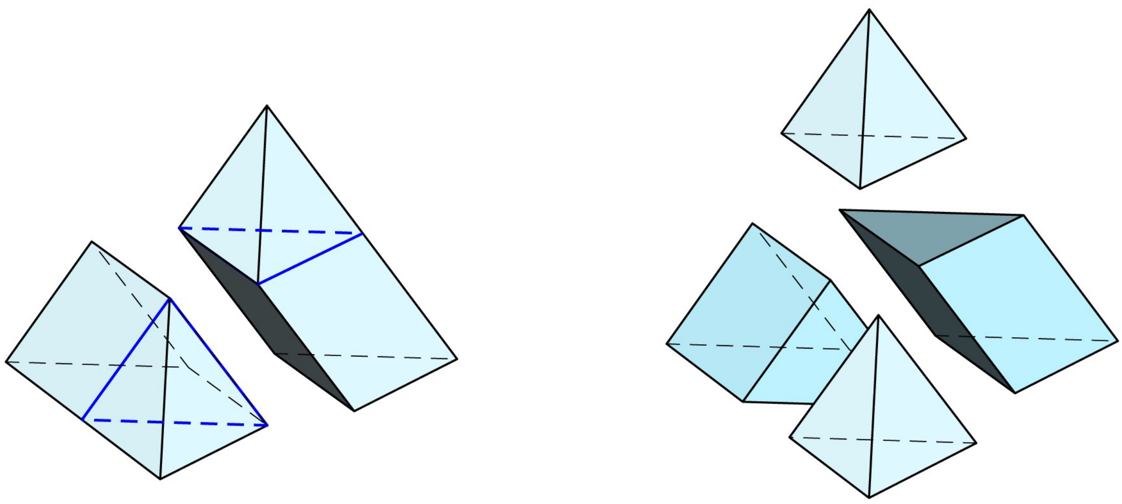
Ceci est naturel pour le cube (un cube dont l'arête est 2 fois plus longue à un volume 2^3 = 8 fois plus grand). Pour les autres solides, cela se déduit des égalités des rapports de volume.

Eudoxe admet : aussi que deux prismes de même base et de même hauteur (l'un droit, l'autre non), ont même volume, à savoir V= base x hauteur.

Avec ces prérequis, Eudoxe remarque qu'un tétraèdre régulier en deux parties identiques obtenue en découpant le tétraèdre par le plan passant par les milieux de quatre arêtes du tétraèdre différentes de deux arêtes opposées choisies au préalable.



Chacune de ces pièces peut se décomposer en un tétraèdre dont les côtés sont deux fois plus petits que le tétraèdre initial et en un prisme (non droit) de base triangulaire équilatéral et de hauteur égale à celle du petit tétraèdre.



Ainsi le grand tétraèdre régulier, dont l'arête est 2 fois plus longue que celle du petit tétraèdre, se décompose en deux prismes (dont la base est identique aux faces du petit tétraèdre et dont la hauteur est identique à celle du petit tétraèdre) et deux petits tétraèdres. Si on note V le volume du grand tétraèdre, v celui du petit et p celui du prisme. On a les relations V=8 v ; V=2v +2p et p = base x hauteur.

On obtient donc 8v = V = 2v+2p = 2v +2(base • hauteur). Donc on déduit

v = (base • hauteur)/3.

Cette preuve est accessible à tout élève connaissant le volume d'un parallélépipède rectangle pour autant qu'il admette les présupposés naturels d'Eudoxe. Une activité basée sur cette preuve permet donc non seulement de démontrer cette formule donnant la mesure (le volume) du tétraèdre régulier en utilisant les propriétés de la grandeur à savoir son invariance par découpe, mais permet aussi d'entraîner et d'utiliser la résolution algébrique d'équations dans un contexte très différent de ceux habituellement rencontrés par les élèves.

Éléments théoriques et/ou historiques

La preuve d'Eudoxe de cette équidécomposition du tétraèdre régulier est d'autant plus intéressante que ce solide est le premier dont on a su en 1901 (*Math. Ann.* 55 (1901), no. 3, 465–478.), qu'il n'était pas équidécomposable à un cube ou même à un parallélépipède rectangle.

On savait depuis Euclide que toute surface polygonale simple est équidécomposable (voir activité...) à un carré, de ce résultat, le théorème de Wallace-Bolyai-Gerwien se déduit aisément.

Théorème (Wallace-Bolyai-Gerwien)

Deux surfaces polygonales de même aire sont équidécomposables.

La question de l'équidécomposabilité de polyèdres restait ouverte. Hilbert posa cette question dans sa fameuse liste de 23 problèmes au congrès des mathématiciens de 1900. C'est son élève Max Dehn qui répondra à cette question par la négative moins d'un an plus tard en construisant un invariant numérique relativement à l'équidécomposition et en montrant que le tétraèdre régulier et le cube de même volume n'ont pas le même invariant. Ils ne peuvent donc pas être équidécomposables.

J.-P. Sidler (Conditions nécessaires et suffisantes pour l'équivalence des polyèdres de l'espace euclidien à trois dimensions. Commentarii Mathematici Helvetici Band : 40 (1965-1966)) montrera dans les années 60 que le volume et l'invariant de Dehn forment un invariant complet. C'est-à-dire que si deux polyèdres ont même volume et même invariant de Dehn, alors ils sont équidécomposables l'un par rapport à l'autre.

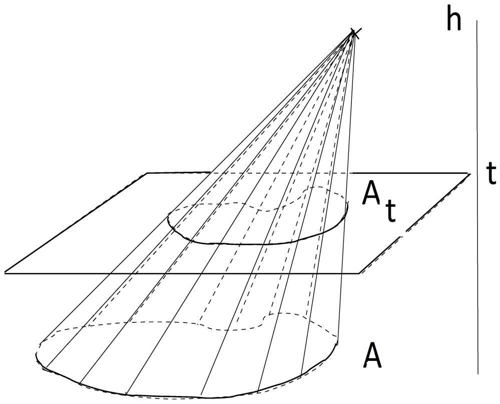
Il est donc impossible d'espérer faire le même genre de découpe d'un cube en tétraèdres réguliers similaires au premier puzzle (les trois pyramides formant le cube).

Cette équidécomposition du tétraèdre régulier permettant d'établir la formule sans calcul intégral est donc tout à fait intéressante.

Néanmoins pour démontrer que la formule générale du volume d'un objet de type pyramide de hauteur h et de base d'aire A est V= $\frac{A h}{3}$, il est impossible d'éviter le calcul intégral.

Supplément pour la fin du collège :

La preuve de la formule de V= $\frac{A h}{3}$ pour une pyramide de base quelconque dont l'aire vaut A et de hauteur h est assez simple. C'est un excellent exercice pour des étudiants de fin de collège.



Il suffit de remarquer, par homothétie, que l'intersection d'un plan parallèle au plan de la base et à distance t de celui-ci avec la pyramide a une aire égale à
$A_t=(h-t)^2 A$ pour tout t compris entre 0 et h.
Le volume de la pyramide se calcule donc comme l'intégrale suivante :

$$V=\int_0^h A_t\,dt=\int_0^h A(h-t)^2\,dt=A\int_0^h (h-t)^2\,dt$$

En effectuant la substitution

u=h-t, et donc du = -dt

On obtient

$$V=A\int_h^0 u^2(-du)=A\int_0^h u^2\,du=\frac{A\,u^3}{3}\Big|_0^h=\frac{A\,h^3}{3}-\frac{A\,0^3}{3}=\frac{A\,h^3}{3}$$

Cette preuve est valable directement pour toutes les bases polygonales, puisque la remarque permettant de dire $A_t=(h-t)^2 A$ découle d'une triangulation de la base et pour chacune des pyramides à base triangulaire, la relation découle de Thalès.

Pour des surfaces non polygonales dont le bord est assez régulier, il faut ajouter des approximations de la pyramides par des pyramides à base polygonale dont les bases approchent la base de la pyramide initiale de mieux en mieux. Un passage à la limite permet ensuite d'obtenir $A_t=(h-t)^2 A$ et de finir la preuve comme précédemment.