ex 36 $\quad \Pi$ par $A(0;0;8)$, $B(6;0;0)$, $C(6;3;0)$ $\qquad \vec{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$ et $\vec{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$

éq. de Π : $P = (x;y;z) \in \Pi \iff \vec{AP} = \lambda \vec{AB} + \mu \vec{BC}$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-8 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{array}{l} ① \\ ② \\ ③ \end{array} \begin{cases} x = 6\lambda \\ y = 3\mu \\ z-8 = -8\lambda \end{cases}$$

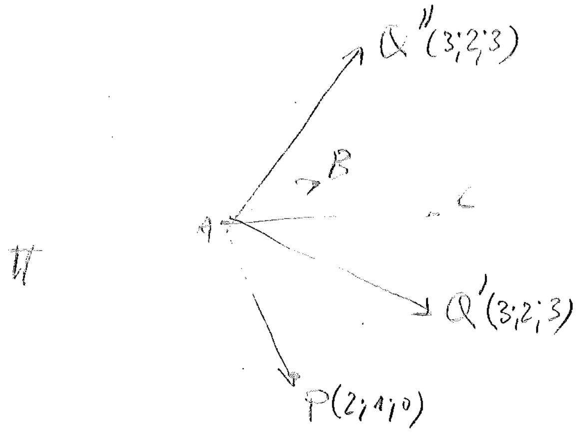
$① : \lambda = \frac{x}{6}$

$③ : \lambda = \frac{z-8}{-8}$ $\Rightarrow \frac{x}{6} = \frac{z-8}{-8} \iff -8x = 6z - 48$

$\iff \boxed{-8x - 6z + 48 = 0}$ éq. de Π

(ou $-8x + 0y - 6z + 48 = 0$
on peut vérifier que A, B et $C \in \Pi$!)

ou encore :
$+4x + 3z = 24$



Q est du m̂ côté du plan Π que P

$\iff \vec{AQ} = \alpha \vec{AP} + \beta \vec{AB} + \gamma \vec{BC}$
avec $\alpha > 0$

[si $\alpha < 0$, Q est "de l'autre côté" !]

$$\iff \begin{pmatrix} 3-0 \\ 2-0 \\ 3-8 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2-0 \\ 1-0 \\ 0-8 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

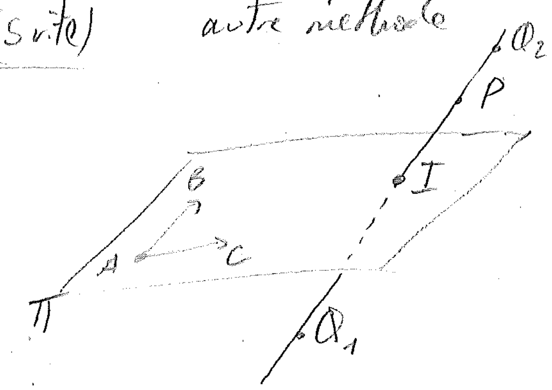
$$\iff \begin{array}{l} ① \\ ② \\ ③ \end{array} \begin{cases} 3 = 2\alpha + 6\beta \\ 2 = \alpha + 3\gamma \\ -5 = -8\alpha - 8\beta \end{cases}$$

$4① + ③ : 12 - 5 = 24\beta - 8\beta \iff 16\beta = 7 \iff \beta = 7/16$

dans $①$: $3 = 2\alpha + \cancel{6}^{3} \cdot \frac{7}{\cancel{16}_{8}} \iff 2\alpha = 3 - \frac{3}{8} = \frac{21}{8}$

$\iff \alpha = \frac{21}{16} > 0$

ex 36 (suite) autre méthode



on a obtenu l'éq. de Π : $4x+3z=24$

Soit d par $P(2;1;0)$ et $Q(3;2;3)$:

$T(x;y;z)\in d \Leftrightarrow \overrightarrow{PT}=\lambda\overrightarrow{PQ}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-2\\ y-1\\ z-0\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}3-2\\2-1\\3-0\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=\lambda\\ y-1=\lambda\\ z=3\lambda\end{cases}$

$\Leftrightarrow \lambda=\left[x-2=y-1=\frac{z}{3}\right]$

2 équations cart. de d.

$d\cap\Pi$: $\begin{cases} (1)\ x-2=y-1\\ (2)\ x-2=z/3\\ (3)\ 4x+3z=24\end{cases}$

$(1)-(2)$: $(4)\ y-1-z/3=0$

$(3)-4\cdot(1)$: $(5)\ 3z-8=+24-4y+4$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3y-z=3 & \cdot 3\\ 4y+3z=20\end{cases}$

$13y=29$

$y=29/13$

dans (1) : $x=\frac{29}{13}+1=\frac{42}{13}$

dans (2) $z=3\left(\frac{42}{13}-2\right)=3\cdot\frac{16}{13}=\frac{48}{13}$

$\Rightarrow I\left(\frac{42}{13},\frac{29}{13},\frac{48}{13}\right)$

vérif : $I\overset{?}{\in}\Pi$: $4\cdot\frac{42}{13}+3\cdot\frac{48}{13}\overset{?}{=}24 \Leftrightarrow 4\cdot34+3\cdot24\overset{?}{=}13\cdot24$ OK

$I\overset{?}{\in}d$: $\frac{42}{13}-2\overset{?}{=}\frac{29}{13}-1\overset{?}{=}\frac{\frac{48}{13}}{3}$ OK ($\lambda=16/13$!)

Enfin : P et Q sont du "même côté de Π" $\Leftrightarrow \overrightarrow{PQ}=\alpha\cdot\overrightarrow{PI}$ avec $\lambda\in]0;1[$ ou $\lambda<0$

on a : $\overrightarrow{PI}=\begin{pmatrix}\frac{42}{13}-2\\ \frac{29}{13}-1\\ \frac{48}{13}-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}16/13\\16/13\\48/13\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{PQ}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$

donc $\overrightarrow{PQ}=\frac{13}{16}\overrightarrow{PI}$; $\alpha=\frac{13}{16}<0$ donc ils sont bien du même côté.