ex52

$$\vec{u}\times\vec{v}\begin{pmatrix}-1\cdot 3-2\cdot 1\\ 2\cdot 0-1\cdot 3\\ 1\cdot 1-(-1)\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-3\\1\end{pmatrix} \qquad \vec{v}\times\vec{u}=-\vec{u}\times\vec{v}=\begin{pmatrix}5\\3\\-1\end{pmatrix}$$

$$\vec{w}\times\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot 3-1\cdot 1\\ 1\cdot 0-2\cdot 3\\ 2\cdot 1-0\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-6\\2\end{pmatrix}$$

$$\vec{w}\cdot\vec{u}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot 2-(-1)\cdot 1\\ 1\cdot 1-2\cdot 2\\ 2(-1)-0\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\\-2\end{pmatrix}$$

aires des parallélogrammes

ex53

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ coplanaires $\Leftrightarrow$ $\vec{u}\times\vec{v}$ et $\vec{u}\times\vec{w}$ colinéaires
(et non colinéaires)

$$\vec{u}\times\vec{v}\begin{pmatrix}2\cdot 2-(-1)(-3)\\ -3\cdot 0-1\cdot 2\\ 1\cdot(-1)-2\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$$

$$\vec{u}\times\vec{w}\begin{pmatrix}2\cdot 0-(-3)(-3)\\ -3\cdot 1-1\cdot 0\\ 1\cdot(-3)-2\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9\\-3\\-5\end{pmatrix}$$

ne sont pas colinéaires
donc $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ pas coplanaires

ex55

a) $\vec{u}\times\vec{v}\begin{pmatrix}-1\cdot 3-1\cdot 2\\ 2\cdot 0-1\cdot 3\\ 1\cdot 1-(-1)\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\-3\\1\end{pmatrix}$

b) $\|\vec{u}\times\vec{v}\|=\sqrt{25+9+1}=\sqrt{35}$ donc $\frac{1}{\sqrt{35}}\begin{pmatrix}-5\\-3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5/\sqrt{35}\\-3/\sqrt{35}\\1/\sqrt{35}\end{pmatrix}$

ex54

a) faux : $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} : \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$

c-ex

vrai est : $\vec{u} \times \vec{v} = -(\vec{v} \times \vec{u})$

b) vrai : $\vec{u}, \vec{v}$ colin $\Leftrightarrow \vec{u} = \lambda \vec{v} \Leftrightarrow$ angle α entre $\vec{u}$ et $\vec{v} = 0$

donc $\vec{u} \times \vec{v}$ est de norme $\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin(0) = 0$

donc $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$

c) vrai : hyp : $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$: cas 1 : $\vec{u} = \vec{0}$, donc $\vec{u} = 0 \cdot \vec{v}$ donc $\vec{u}, \vec{v}$ colin

(idem si $\vec{v} = \vec{0}$)

cas 2 : $\vec{u}$ et $\vec{v} \neq 0$, donc $\|\vec{v}\|$ et $\|\vec{u}\| \neq 0$

comme $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \sin(\alpha)$: ..

et $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \|\vec{u} \times \vec{v}\| = 0$

donc $\sin(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0°$ ou $\alpha = 90°$

$\Leftrightarrow \vec{u} = \lambda \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}, \vec{v}$ colin.

d) vrai : $\vec{u} \times \vec{v}$ est $\perp$ à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$

donc $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{u}$ et $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0$

e) faux : $\underbrace{\underbrace{(\vec{u} \times \vec{v})}_{\text{vecteur}} \cdot \vec{w}}_{\text{nombre}} \overset{?}{=} \underbrace{\vec{v} \times \vec{w}}_{\text{vecteur}}$ c'est faux !

(il faudrait $(\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$)

f) faux : $2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times 2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \overset{?}{=} 2\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)$

c-ex $\Leftrightarrow \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} \overset{?}{=} 2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}0\\0\\4\end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$

il faudrait $(\lambda \vec{u}) \times (\lambda \vec{v}) = \lambda^2 (\vec{u} \times \vec{v})$