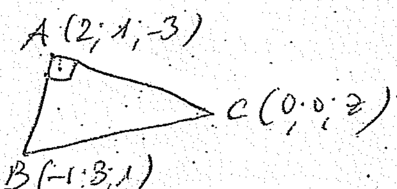
**Ex56.**

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)\cdot 3 - 2\cdot 1 \\ -(1\cdot 3 - 2\cdot 0) \\ 1\cdot 1 - (-1)\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \left\| \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(-5)^2 + (-3)^2 + 1^2} = \sqrt{35}$$ = aire parallélogramme défini par $\vec{u}$ et $\vec{v}$

**Ex57.**

$C \in$ axe $Oz \Leftrightarrow C = (0;0;z)$




$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 - 2 \\ 3 - 1 \\ 1 - (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 - 2 \\ 0 - 1 \\ z - (-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ z+3 \end{pmatrix}$$

on veut : $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ z+3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4z + 16 = 0 \Leftrightarrow z = -4$$

donc $C = (0;0;-4)$

**Ex 58**

a) $P = (x;y;z) \in \pi \Leftrightarrow \vec{AP} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

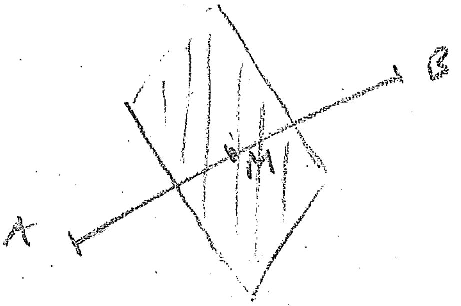
$\Leftrightarrow (x-2)\cdot 1 + (y-1)\cdot 2 + (z-1)\cdot 3 = 0$

$\Leftrightarrow x + 2y + 3z - 7 = 0$

b) $\pi : 2x + 0y - 4z = 3$

d'où $\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \perp \pi$

ex60




point milieu de [AB] : $M\left(\frac{0+2}{2}; \frac{1+1}{2}; \frac{-2+0}{2}\right) = (1;1;-1)$

$M \in \Pi$

vecteur normal de $\Pi$ : $\vec{AB}\begin{pmatrix}2-0\\1-1\\0-(-2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$

éq. cart de $\Pi$ : soit $P(x;y;z)\in\Pi$

$\vec{MP}\cdot\vec{AB}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-(-1)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}=0$

$\Leftrightarrow 2(x-1)+2(z+1)=0$

$\Leftrightarrow [x+z=0]$

ex61 : $\vec n \perp \Pi$ est donné par :

$\vec n = \vec{OC}\times\vec{OB} = \begin{pmatrix}3\\1\\-4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\2\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\cdot5+4\cdot2\\-3\cdot5\\3\cdot2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13\\-15\\6\end{pmatrix}$

$\vec n$ est vecteur directeur de la droite $d \perp \Pi$ par O

$\|\vec n\| = \sqrt{13^2+(-15)^2+6^2} = \sqrt{430}$

Soit $\begin{cases}\vec{P_A} \text{ la projection de } \vec{OA} \text{ sur } \vec n\\ \vec{P_B} \text{ " " } \vec{OB} \text{ sur } \vec n\end{cases}$

$\vec{P_A} = \frac{\vec n\cdot\vec{OA}}{\|\vec n\|^2}\cdot\vec n = \frac{\begin{pmatrix}13\\-15\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}}{430}\cdot\vec n$

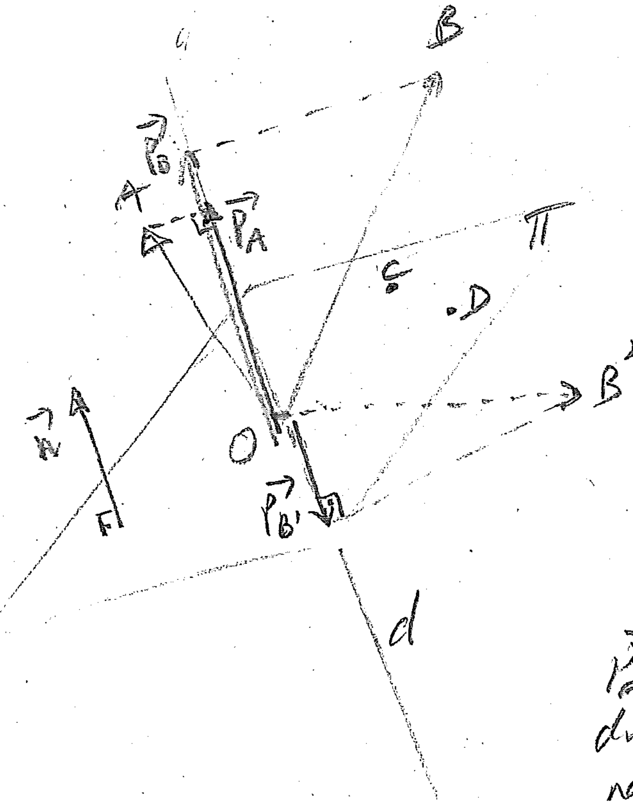
$= \frac{-13-30+18}{430}\cdot\vec n$

$= \frac{-25}{430}\vec n$

$\vec{P_B} = \frac{\vec n\cdot\vec{OB}}{\|\vec n\|^2}\cdot\vec n = \frac{\begin{pmatrix}13\\-15\\6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\2\end{pmatrix}}{430}\cdot\vec n$

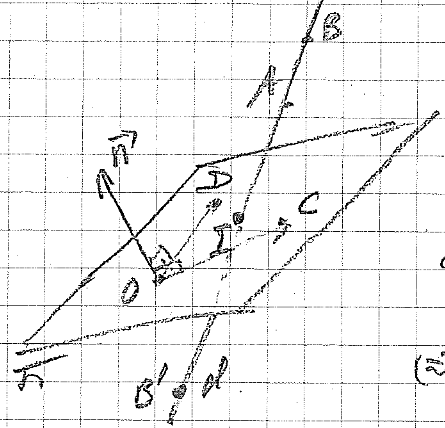
$= \frac{0+15+12}{430}\vec n$

$= \frac{27}{430}\vec n$




$\vec{P_A}$ et $\vec{P_B}$ n'ont pas le même sens donc A et B sont situés de part et d'autre de $\Pi$

ex61 alternative




soit $d$ par $A$ et $B$ :

$$d : \begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0+1 \\ -1-2 \\ 2-3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = \lambda \\ y-2 = -3\lambda \\ z-3 = -\lambda \end{cases} \Leftrightarrow x+1 = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-1}$$

$\pi$ : $\vec{n} = \vec{OC} \times \vec{OD}$ normal à $\pi$

$$= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5+8 \\ -(15+0) \\ 6-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -15 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{OP} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 13 \\ -15 \\ 6 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 13x - 15y + 6z = 0$$

$I = \pi \cap d$ : $\begin{cases} 13x - 15y + 6z = 0 \\ x = \lambda - 1 \\ y = 2 - 3\lambda \\ z = 3 - \lambda \end{cases}$ substitution : $13(\lambda-1) - 15(2-3\lambda) + 6(3-\lambda) = 0$

$$13\lambda + 45\lambda - 6\lambda - 13 - 30 + 18 = 0$$
$$52\lambda = 25$$
$$\lambda = 25/52 \quad (*)$$

[A] Suite "tête baissée" : d'où $x = \frac{25}{52} - 1 = -27/52$

$y = 2 - 3 \cdot \frac{25}{52} = 29/52$

$z = 3 - \frac{25}{52} = 131/52$

càd $I\left(-\frac{27}{52} ; \frac{29}{52} ; \frac{131}{52}\right)$

On cherche $\alpha$ tq $\vec{AB} = \alpha \vec{AI} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -27/52 + 1 \\ 29/52 - 2 \\ 131/52 - 3 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 25/52 \\ -75/52 \\ -25/52 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \alpha = 52/25$

càd $\vec{AB} = \frac{52}{25} \vec{AI}$

comme $\alpha > 1$, A et B sont de part et d'autre de $\pi$

[B] Plus rapide : le $\alpha = \frac{25}{52}$ trouvé en (*) représentait déjà à ce stade le multiple de $\vec{AB}$ à utiliser pour trouver $\vec{AI}$ ; on pouvait donc déjà conclure

Ex59

vect $\vec{n} \perp$ à $\pi'$ : $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$

$\vec{n}$ est vect directeur de $\pi$

$\vec{AB}\begin{pmatrix}2-1\\1-1\\1-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

$\vec{n} \neq k\vec{AB}$ donc $\vec{AB}\times\vec{n}$ est un vecteur normal à $\pi$.

$\vec{AB}\times\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0+1\\-(1-2)\\-1-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = \vec{m}$

éq cart de $\pi$ : soit $P(x;y;z) \in \pi$ :

$$\vec{AP}\cdot\vec{m} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x-1+y-1-z=0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x+y-z-2=0}$$

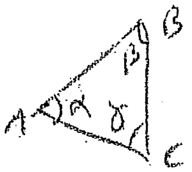
---

ex 62

$\vec{AB}\begin{pmatrix}2-(-1)\\3-(-1)\\-1-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{AB}\| = \sqrt{9+16+1} = \sqrt{26}$

$\vec{AC}\begin{pmatrix}-2-(-1)\\-2-(-1)\\0-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{AC}\| = \sqrt{2}$

$\vec{BC}\begin{pmatrix}-2-2\\-2-3\\0-(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-5\\1\end{pmatrix} \Rightarrow \|\vec{BC}\| = \sqrt{16+25+1} = \sqrt{42}$




$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{AC}\cdot\vec{AB}}{\|\vec{AC}\|\|\vec{AB}\|} = \frac{3(-1)+4(-1)+(-1)\cdot 0}{\sqrt{2}\sqrt{26}} = \frac{-7}{\sqrt{52}}$$

$\alpha \simeq 166{,}1°$

$$\cos(\beta) = \frac{\vec{BA}\cdot\vec{BC}}{\|\vec{BA}\|\|\vec{BC}\|} = \frac{\begin{pmatrix}-3\\-4\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-4\\-5\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{26}\sqrt{42}} = \frac{+33}{\sqrt{26\cdot 42}} = \frac{33}{\sqrt{4\cdot 273}} = \frac{33}{2\sqrt{273}}$$

$\beta \simeq 3°$

$\gamma = 180-\alpha-\beta \simeq 10{,}9°$

$\vec{AB}\times\vec{AC} = \begin{pmatrix}3\\4\\-1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\cdot 0-(-1)(-1)\\-(3\cdot 0-(-1)(-1))\\3(-1)-4(-1)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix} \Rightarrow$ Aire $\Delta ABC = \frac{\|\vec{AB}\times\vec{AC}\|}{2}$

$$= \frac{\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

**ex 63** $C(x;y;z) \in$ axe $Oz \Leftrightarrow x=y=0$ : $C(0;0;z)$

on veut : angle en $A = 90°$ $\Leftrightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1-2 \\ 3-1 \\ 1-(-3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0-2 \\ 0-1 \\ z-(-3) \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ z+3 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 6-2+4z+12=0$$

$$\Leftrightarrow z=-4 \text{ , donc } C:(0;0;-4)$$

**ex 64** $A(2;1;3) \in d$, donc $A \in \Pi$, donc $\vec{AP}\begin{pmatrix} 4-2 \\ 2-1 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ vect dir de $\Pi$

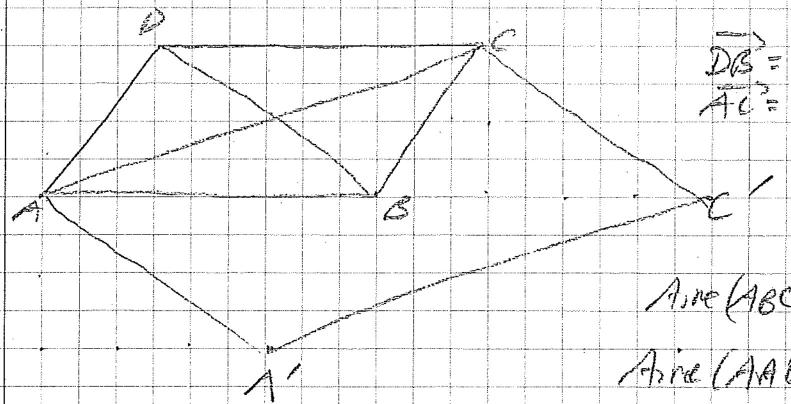
$\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ vect dir de d

donc $\vec{n} = \vec{AP} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-6 \\ -(2+2) \\ -6-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix} \perp$ à $\Pi$

éq. cart de $\Pi$ : $M(x;y;z) \in \Pi \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -5x-4y-7z+35=0$$

ex 65




$\vec{DB} = \vec{AA'} = \vec{CC'}$

$\vec{AC} = \vec{A'C'}$

$Aire(ABCD) = \|\vec{AB} \times \vec{AD}\|$

$Aire(AA'C'C) = \|\vec{AA'} \times \vec{AC}\|$

on a : $\vec{AA'} \times \vec{AC} = \vec{DB} \times (\vec{AD} + \vec{DC})$

$= (\vec{DC} + \vec{CB}) \times (\vec{AD} + \vec{AB})$

$= (\vec{AB} - \vec{AD}) \times (\vec{AD} + \vec{AB})$

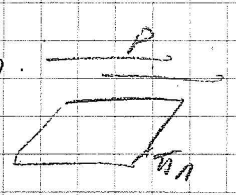
$= (\vec{AB} \times \vec{AD}) - \underbrace{(\vec{AD} \times \vec{AD})}_{=0} + \underbrace{(\vec{AB} \times \vec{AB})}_{=0} - (\vec{AD} \times \vec{AB})$

$= (\vec{AB} \times \vec{AD}) + (\vec{AB} \times \vec{AD}) = 2(\vec{AB} \times \vec{AD})$

d'où $Aire(AA'C'C) = \|2(\vec{AB} \times \vec{AD})\| = 2 \cdot Aire(ABCD)$

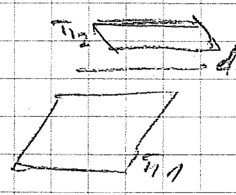
ex 66

(a)



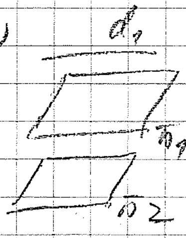

vrai

(b)



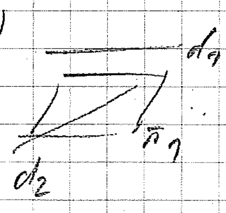

faux

(c)




vrai

(d)




faux

ex 67

$\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n_1} = \lambda \cdot \vec{n_2}$

$\vec{n_1}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ k \end{pmatrix}$ et $\vec{n_2}\begin{pmatrix} 2 \\ m \\ 5 \end{pmatrix}$, d'où ① $3 = \lambda \cdot 2$ ② $-1 = \lambda \cdot m$ ③ $k = \lambda \cdot 5$

① $\lambda = 3/2$
② $m = -1/\lambda = -2/3$
③ $k = 5\lambda = 15/2$

ex 68

$\pi_3 \perp \pi_1 \Leftrightarrow \vec{n_3}$ directeur de $\pi_1$

$\pi_3 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n_3}$ " " $\pi_2$

$\vec{n_1}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{n_2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{n_3}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

$O(0;0;0) \in \pi_3$ donc

éq. de $\pi_3$ : $ax + by + cz + 0 = 0$

$\vec{n_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-6 \\ -2+3 \\ 4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

donc $\pi_3 : -7x + y + 5z = 0$