ex 69 $P(-2;1;3)$ $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}$

a) Soit $Q(x;y;z)$ un point de π

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}=0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-(-2)\\y-1\\z-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)+0+3(z-3)=0$$

$$\Leftrightarrow x+3z-7=0$$

b) $$\delta(\pi;O)=\frac{|1\cdot 0+0\cdot 0+3\cdot 0-7|}{\sqrt{1^2+0^2+(3)^2}}=\frac{7}{\sqrt{10}}$$

c) $$\delta(\pi;A)=\frac{|1\cdot 2+0\cdot 1+3\cdot 3-7|}{\sqrt{1^2+0^2+(3)^2}}=\frac{4}{\sqrt{10}}$$

ex 70

a) π': $3x+5y-7z-11=0$

vect $\vec{m}\perp\pi'$: $\vec{m}\begin{pmatrix}3\\5\\-7\end{pmatrix}$

donc $\vec{m}$ aussi $\perp$ à π'' : Soit $Q(x;y;z)\in\pi''$

$$\overrightarrow{AQ}\cdot\vec{m}=0$$

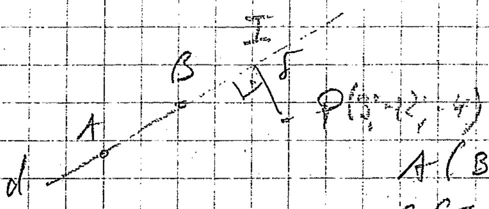
$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-2\\y-(-3)\\z-5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\5\\-7\end{pmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow 3(x-2)+5(y+3)-7(z-5)=0$$

$$\Leftrightarrow 3x+5y-7z+44=0$$

b) $$\delta(\pi';A)=\frac{|3\cdot 2+5\cdot(-3)-7\cdot 5-11|}{\sqrt{3^2+5^2+(-7)^2}}=\frac{|-55|}{\sqrt{83}}=\frac{55}{\sqrt{83}}$$

ex 71



$$\delta = \frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$$

$\left.\begin{array}{l} A(3;-1;5) \\ B(5;2;6) \end{array}\right\} \in d$ $\quad \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} \quad \overrightarrow{AP}\begin{pmatrix}0\\-11\\-9\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\-11\\-9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-16\\+18\\-22\end{pmatrix}$$

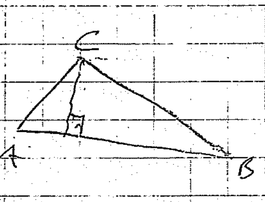
a) $\delta = \dfrac{\sqrt{1064}}{\sqrt{14}}$

$= \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$

b) $\overrightarrow{\mathrm{proj}_{d}\,AP} = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP}}{\|\overrightarrow{AB}\|^2}\,\overrightarrow{AB} = \dfrac{-42}{14}\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} = \overrightarrow{AI} = \begin{pmatrix}x-3\\y+1\\z-5\end{pmatrix}$

$\Rightarrow I(-3;-10;2)$

ex 72



On pose $A'(-5;1;0)$, $B'(-2;7;0)$ et $C'(5;-2;0)$

$$\frac{\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{\left\|\begin{pmatrix}3\\6\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}10\\-3\\0\end{pmatrix}\right\|}{\sqrt{45}} = \frac{\left\|\begin{pmatrix}0\\0\\-69\end{pmatrix}\right\|}{\sqrt{45}} = \frac{69}{\sqrt{45}} = \frac{69}{3\sqrt{5}}$$

$$= \frac{23\sqrt{5}}{5} \quad \left(= \sqrt{\frac{529}{5}}\right)$$

ex 73 (long sans formule)

Éq. de d : $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ normal au plan π et directeur de d

$O(0;0;0) \in d$

$P(x;y;z) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} = \lambda \vec{n} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-0\\y-0\\z-0\end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = -\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow \lambda = \boxed{x = -y = z}$ éq. cart's de d

Éq. de $\pi' \perp d$ tq $A \in \pi'$: $\vec{n}$ normal à π'

$A(-1;0;1) \in \pi'$

$P(x;y;z) \in \pi' \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x+1\\y-0\\z-1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow x+1-y+z-1=0$

$\Leftrightarrow x-y+z=0$

Intersection de π' et d : $\begin{cases} ① \; x-y+z=0 : \pi' \\ ② \; x=-y \\ ③ \; x=z \end{cases}$ $\Big\}: d$

② et ③ dans ① : $x+x+x=0$

$3x=0$

$x=0$

② $y=0$

③ $z=0$

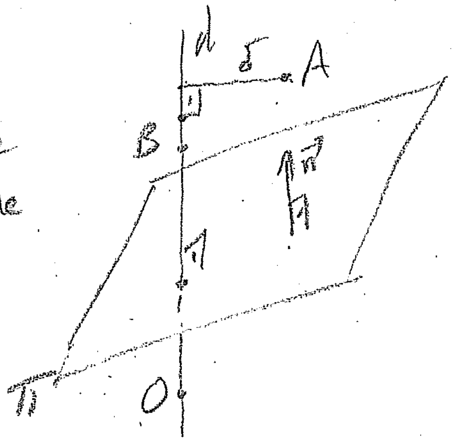
π' contient $O(0;0;0)$!

d'où $\delta(A;d) = \delta(A;O) = \|\overrightarrow{OA}\| = \left\|\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\|$

$= \sqrt{(-1)^2+0^2+1^2} = \sqrt{2}$

ex 73

rapide avec formule



$$\delta = \frac{\|\vec{OB} \times \vec{OA}\|}{\|\vec{OB}\|}$$

il ne manque qu'un point B de d :

$\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \perp \pi$, donc $\vec{n}$ directeur de d

$d:\ \vec{OP} = \lambda\vec{n} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

on choisit $\lambda = 1$: $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow B(1;-1;1) \in d$

d'où $\delta = \dfrac{\left\|\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\|}{\sqrt{1+1+1}} = \dfrac{\left\|\begin{pmatrix}-1\\-2\\-1\end{pmatrix}\right\|}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}$

Remarque pour l'ex 70a)

$\pi' : 3x + 5y - 7z - 11 = 0$

et on veut $\pi'' \parallel \pi'$, donc $\vec{n}_{\pi''} = \vec{n}_{\pi} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -7 \end{pmatrix}$

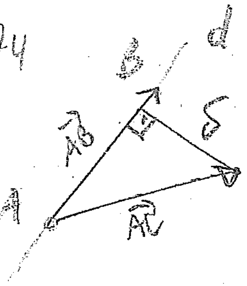
donc $\pi'' : 3x + 5y - 7z + d = 0$

on veut $A(2;-3;5) \in \pi'' \Leftrightarrow 3\cdot 2 + 5(-3) - 7\cdot 5 + d = 0$

$\Leftrightarrow -44 + d = 0 \Leftrightarrow d = 44$

donc $\pi'' : 3x + 5y - 7z + 44$

ex 74



$$\|\vec{p}\| = \left\| \overrightarrow{proj_{\vec{AB}} AC} \right\| = \frac{|\vec{AB} \cdot \vec{AC}|}{\|\vec{AB}\|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{(1 + 4 + 6)}{3} = \frac{11}{3}$$

$$\delta = \sqrt{\|\vec{AC}\|^2 - \|\vec{p}\|^2}$$

$$= \sqrt{14 - \left(\frac{11}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

ou, distance la formule :

$$\delta = \frac{\|\vec{AC} \times \vec{AB}\|}{\|\vec{AB}\|} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|}{\sqrt{9}} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} -4+6 \\ -(-2+3) \\ 2-2 \end{pmatrix} \right\|}{\sqrt{9}} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|}{3}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{3}$$