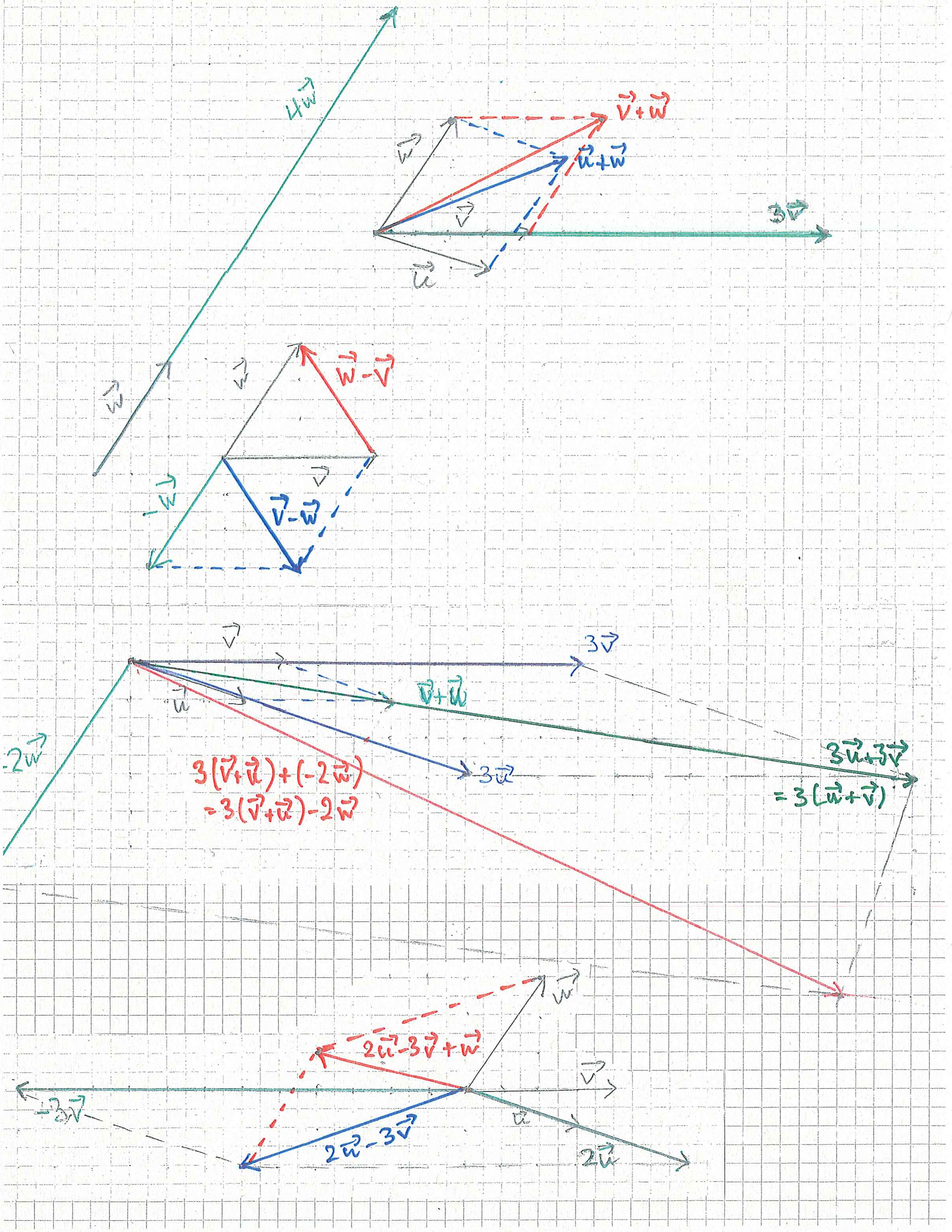
Géométrie vectorielle - exercices corrigés

ex 1



ex3

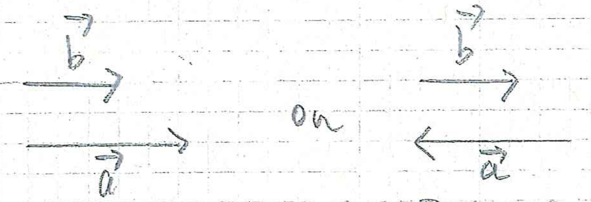
a) $\vec{x} = \vec{f} - \vec{b} = \vec{f} + (-\vec{b}) = -\vec{e}$

b) $\vec{x} = \vec{d} + \vec{e} = \vec{f}$

c) $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{f} + \vec{g} = \vec{0}$

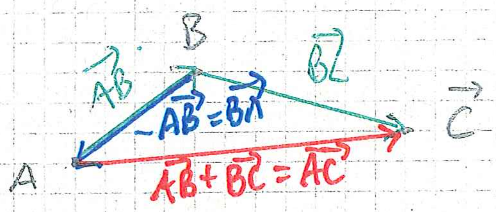
d) $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{d} + \vec{h} = \vec{k}$

ex4

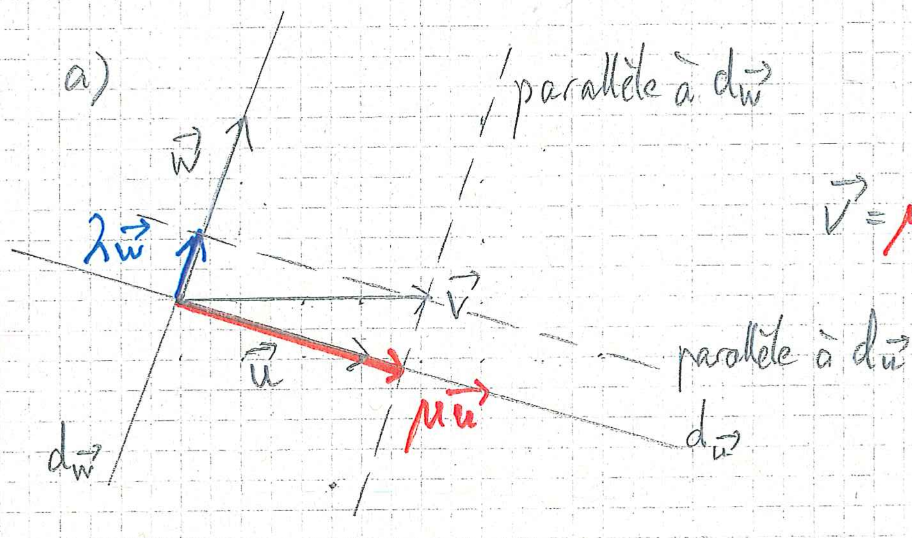


$\lambda = \frac{3}{5}$ $\qquad$ $\lambda = -\frac{3}{5}$

ex5

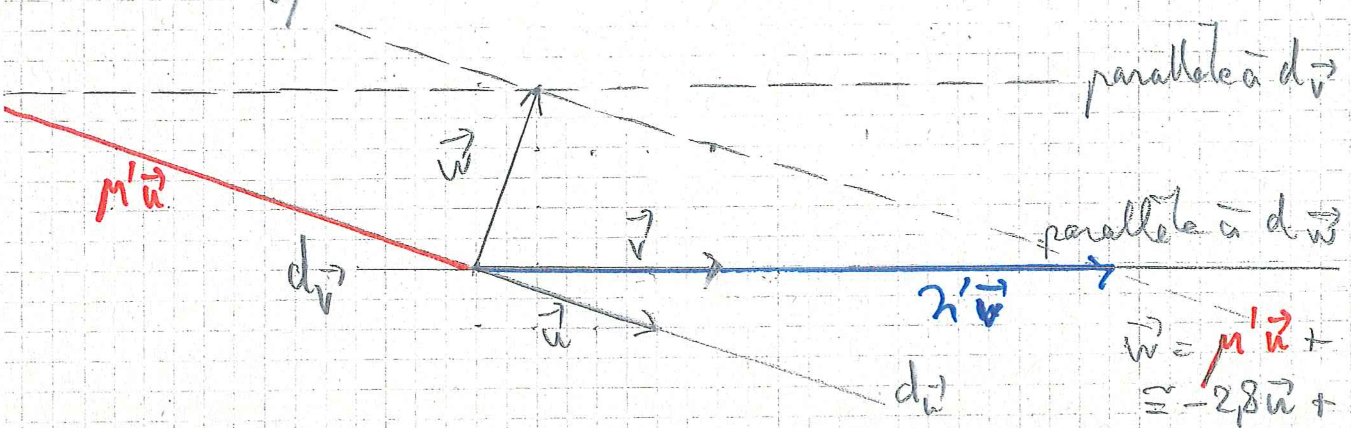


ex6 a)



$\vec{v} = \mu\vec{u} + \lambda\vec{w}$
$\cong 1{,}2\vec{u} + 0{,}3\vec{w}$

b)



$\vec{w} = \mu'\vec{u} + \lambda'\vec{v}$
$\cong -2{,}8\vec{u} + 2{,}6\vec{v}$

ex 7

a) $\vec{f} = (-1)\,\vec{a}$

b) $\vec{f} = (-1)\cdot\vec{g} + (-1)\cdot\vec{c}$

c) $\vec{e} = (-1)\vec{g} + (-1)\vec{e} + (-1)\vec{d} + 0\cdot\vec{f}$

d) $\vec{g} = (-1)\vec{e} + 1\cdot\vec{h} + (-1)\vec{k}$

ex 8

a) $\vec{f} \simeq 0{,}4\,\vec{d} + (-0{,}4)\,\vec{c}$; sol. unique

b) impossible

c) $\vec{c} = (-1)\vec{d} + (-1)\vec{e} + (-1)\cdot\vec{g}$

ou $\vec{c} = (-1)\vec{d} + \left(-\frac{8}{5}\right)\vec{e} + 0\,\vec{g}$

ou $\vec{c} = -1\cdot\vec{d} + 0\cdot\vec{e} + \left(-\frac{8}{3}\right)\vec{g}$ ...

ex 9

a) $\vec{a} = \underbrace{\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BC}}_{\overrightarrow{EC}} + \underbrace{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DE}}_{\overrightarrow{AE}} + \overrightarrow{DC} = \underbrace{\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC}}_{\overrightarrow{AC}} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DC}$

b) $\vec{b} = \overrightarrow{AC} + \underbrace{\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA}}_{\overrightarrow{DA}} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DC}$

c) $\vec{c} = \underbrace{\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CB}}_{\overrightarrow{EB}} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{BD} = \underbrace{\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BD}}_{\overrightarrow{ED}} + \overrightarrow{DE} = \underbrace{\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DE}}_{\overrightarrow{EE}} = \vec{0}$

d) $\vec{d} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}$

$= \overrightarrow{AB} + 2(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + \overrightarrow{BD}$

$= \overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \underbrace{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}}_{\overrightarrow{AD}} + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AC}$

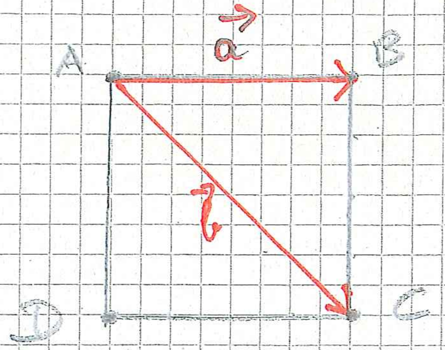
e) $\vec{e} = 87\,\overrightarrow{AC} + 82\,\overrightarrow{CD} + 3\overrightarrow{AD}$

$= 5\overrightarrow{AC} + 82(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}) + 3\overrightarrow{AD}$

$= 5\overrightarrow{AC} + 82\,\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{AD}$

$= 5\,\overrightarrow{AC} + 85\,\overrightarrow{AD}$

ex 10



$\overrightarrow{AB} = 1\cdot\vec{a} + 0\cdot\vec{b}$

$\overrightarrow{BC} = -\vec{a} + \vec{b} = (-1)\vec{a} + 1\cdot\vec{b}$

$\overrightarrow{CD} = -\vec{a} = (-1)\vec{a} + 0\,\vec{b}$

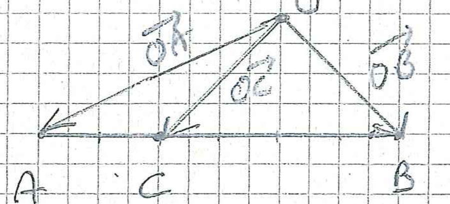
$2\,\overrightarrow{DA} = 2\,\overrightarrow{CB} = 2\left[-\vec{b} + \vec{a}\right] = (-2)\vec{b} + 2\vec{a}$

$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}$

$= \left[(-1)\vec{b} + \vec{a}\right] + \vec{a} = (-1)\vec{b} + 2\vec{a}$

cf pt précédent

ex 11



$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$

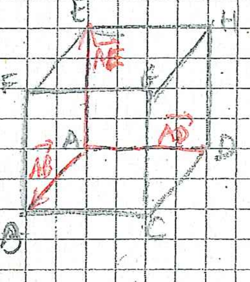
$= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\left[\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}\right]$

$= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\left[-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right]$

$= \overrightarrow{OA} + \left(-\frac{1}{3}\right)\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$

ex 12



a) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ $\left(= 1\cdot\overrightarrow{AB} + 1\cdot\overrightarrow{AD}\right)$

$\overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ $\left(= (-1)\overrightarrow{AB} + 1\cdot\overrightarrow{AD}\right)$

$\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ $\left(= 1\cdot\overrightarrow{AB} + 1\cdot\overrightarrow{AD}\right)$

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ $\left(= 1\cdot\overrightarrow{AE} + 1\cdot\overrightarrow{AB} + 1\cdot\overrightarrow{AD}\right)$

$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AE} + \left(-\overrightarrow{BD}\right)$

$= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$ $\left(= 1\cdot\overrightarrow{AE} + 1\cdot\overrightarrow{AB} + (-1)\overrightarrow{AD}\right)$

$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AE} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$

$= (-1)\overrightarrow{AB} + (-1)\overrightarrow{AD} + 1\cdot\overrightarrow{AE}$

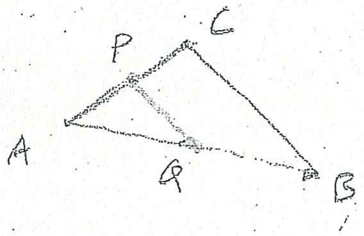
1) $\|\overrightarrow{AC}\|^2 = 1^2 + 1^2 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{2}$

$\|\overrightarrow{BD}\| = \|\overrightarrow{EG}\| = \sqrt{2}$ (idem)

$\|\overrightarrow{AG}\|^2 = \|\overrightarrow{AC}\|^2 + \|\overrightarrow{CG}\|^2 = (\sqrt{2})^2 + 1^2 = 3 \Leftrightarrow \|\overrightarrow{AG}\| = \sqrt{3}$

$\|\overrightarrow{DF}\| = \|\overrightarrow{CE}\| = \sqrt{3}$ (idem)

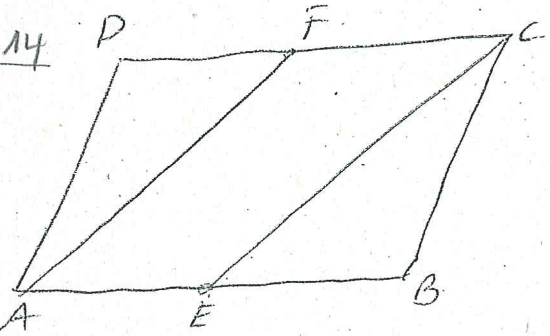
ex13



$\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC}$
$= 2\,\vec{QA} + 2\,\vec{AP}$
$= 2\,(\vec{QA} + \vec{AP})$
$= 2\,(\vec{QP})$ cqfd

Remarque : cela démontre - très facilement ! - que dans un triangle quelconque, le segment qui relie les milieux de 2 côtés est :
- parallèle au 3ème côté
- de longueur moitié de celle du 3ème côté

ex14



Conjecture : AECF est un parallélogramme

dém :

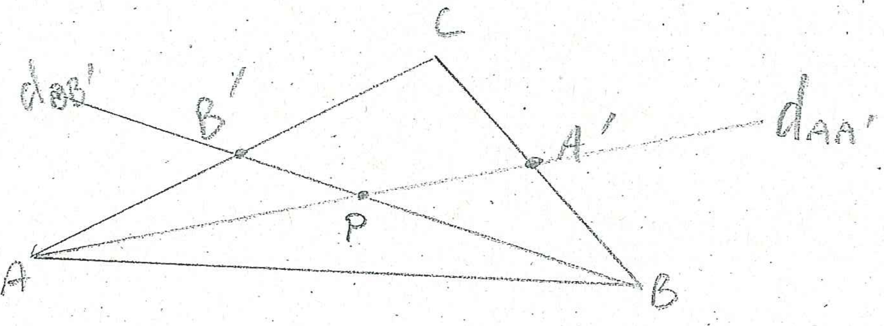
- $[AB] \parallel [DC]$, car ABCD parall. par hyp.
  donc $[AE] \parallel [FC]$ car $A \in [AB]$
  $F \in [DC]$
- on sait (thm) qu'un parallélogramme à 2 paires de côtés égaux également :
  donc $\vec{AD} = \vec{BC}$ et $\vec{AB} = \vec{DC}$

$\Rightarrow \quad \vec{AF} = \vec{AD} + \vec{DF}$
$= \vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{DC}$
$= \vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{AB}$
$= \vec{BC} + \vec{EB}$
$= \vec{EC}$

cqfd

ex 15 Soit ABC un triangle, A' le milieu de $[BC]$, B' le milieu de $[AC]$, $d_{AA'}$ la médiane de ABC issue de A et $d_{BB'}$ la médiane issue de B, et soit $P = d_{AA'} \cap d_{BB'}$.
Montrer que P est situé aux deux-tiers de $[AA']$ et de $[BB']$

Dém:



On sait par l'ex 12. que $2\overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{AB}$

$$\Leftrightarrow 2[\overrightarrow{B'P} + \overrightarrow{PA'}] = [\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB}]$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{B'P} + 2\overrightarrow{PA'} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{2\overrightarrow{B'P} - \overrightarrow{PB}}_{\in d_{BB'}} = \underbrace{\overrightarrow{AP} - 2\overrightarrow{PA'}}_{\in d_{AA'}}$$

Comme $d_{BB'} \not\parallel d_{AA'}$, on a forcément :

$$2\overrightarrow{B'P} - \overrightarrow{PB} = \vec{0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AP} - 2\overrightarrow{PA'} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{B'P} = \frac{1}{2}\overrightarrow{PB} \qquad \Leftrightarrow \overrightarrow{PA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AP}$$

enfin : $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PA'}$

$$= \overrightarrow{AP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AP}$$

$$= \frac{3}{2}\overrightarrow{AP}, \quad \text{d'où } \overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$$

de même : $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BP} + \overrightarrow{PB'}$

$$= -\overrightarrow{PB} - \overrightarrow{B'P}$$

$$= -\overrightarrow{PB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{PB}$$

$$= -\frac{3}{2}\overrightarrow{PB}$$

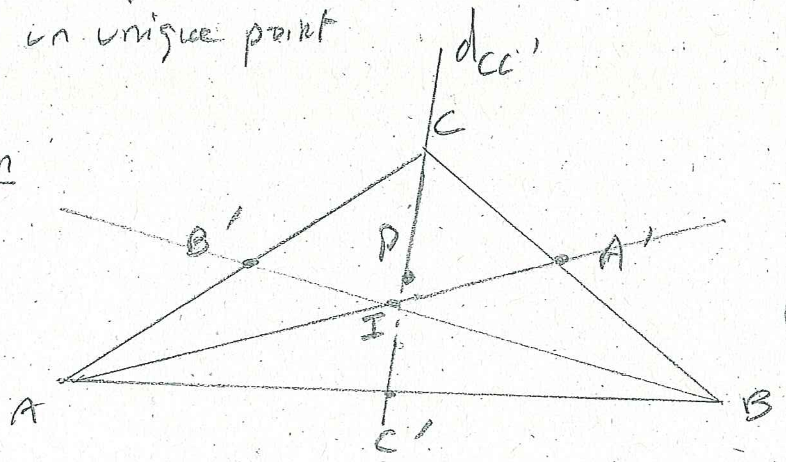
$$= \frac{3}{2}\overrightarrow{BP}, \quad \text{d'où } \overrightarrow{BP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$$

cqfd

ex 16

Prouver que les médianes d'un $\triangle ABC$ se coupent en un unique point

dem



A' milieu de [BC]
B' " " [AC]
C' " " [AB]

on choisit deux médianes, $d_{AA'}$ et $d_{BB'}$ et I leur pt. int

on sait par l'ex 14 que : $\overrightarrow{BI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$

$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$

on considère la médiane $d_{CC'}$

ATTENTION : à ce stade on ne sait pas qu'elle passe par I

C'EST CE QU'ON DOIT MONTRER !!!

Idée : on pose P le point unique tel que $\overrightarrow{CP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$

si on arrive à montrer que $\overrightarrow{BP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$

alors on pourra en déduire que $P = I$

(car $\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$ implique $I = P$)

On a : $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'P}$

$= \left[\frac{2}{3}\overrightarrow{BB'} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BB'}\right] + \overrightarrow{B'P}$

$= \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'} + \left[\frac{1}{3}\overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{B'P}\right]$ ← on veut que $[\dots] = \vec{0}$!

$= \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'} + \left[\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB'}\right) + \left(\overrightarrow{B'C} + \overrightarrow{CP}\right)\right]$

on sait que $\overrightarrow{CP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}$ (déf de P)

$= \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'} + \left[\frac{1}{3}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{CB'} + \overrightarrow{B'C} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CC'}\right]$

$= \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'} + \left[-\frac{1}{3}\overrightarrow{CB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{B'C} + \overrightarrow{B'C} + \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC'}\right)\right]$

$= \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'} + \left[-\frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{B'C} + \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC'}\right]$

$= \frac{2}{3}\overrightarrow{BB'} + \left[\frac{1}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right] + \frac{2}{3}\left[\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}\right]\right]$

cqfd

ex 11 $\quad \vec{v}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$

a) $\|\vec{v}\| = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

b) $\|\vec{w}\| = \sqrt{(-2)^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

c) $\vec{v}+\vec{w} = \begin{pmatrix}4+(-2)\\2+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$

d) $\vec{v}-\vec{w} = \begin{pmatrix}4-(-2)\\2-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$

e) $\vec{w}-\vec{v} = \begin{pmatrix}-2-4\\2-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\0\end{pmatrix}$

f) $2\vec{v} = 2\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot 4\\2\cdot 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$

g) $\|2\vec{v}\| = \left\|\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{8^2+4^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

rem : $\|2\vec{v}\| = 2\cdot\|\vec{v}\|$!

h) $\|\vec{w}+\vec{v}\| = \left\|\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

rem $\|\vec{w}+\vec{v}\| \neq \|\vec{w}\| + \|\vec{v}\|$

i) $\|\vec{w}-\vec{v}\| = \left\|\begin{pmatrix}-6\\0\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{6^2+0^2} = 6$

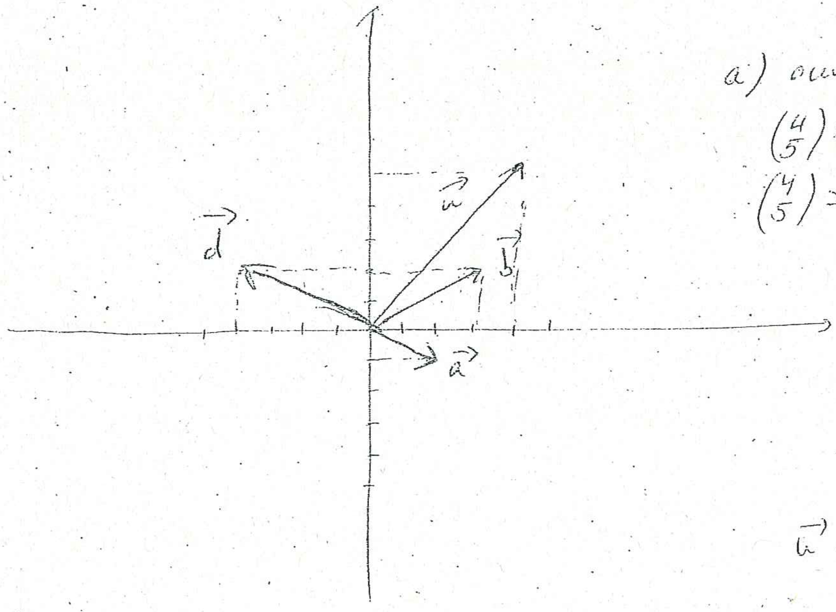
j) $\|\vec{v}-\vec{w}\| = \left\|\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}\right\| = \ldots = 6$

k) $\|\vec{v}\| + \|\vec{w}\| = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{2}$

l) $\|\vec{v}\| - \|\vec{w}\| = 2\sqrt{5} - 2\sqrt{2}$

m) $2\vec{v} - 3\vec{w} = 2\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-6\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14\\-2\end{pmatrix}$

ex18



a) oui :

$$\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\alpha+3\beta\\-\alpha+2\beta\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}2\alpha+3\beta=4\\-\alpha+2\beta=5\end{cases} \quad |2|$$

$$7\beta = 14$$

$$\beta = 2$$

donc $\alpha = 2\beta - 5 = -1$

$$\vec{u} = -\vec{a} + 2\vec{b}$$

b) non :

$$\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}4 = 2\alpha-4\beta\\5=-\alpha+2\beta\end{cases} \quad |2|$$

$$14 = 0 \qquad S = \emptyset$$

c) les vecteurs de même direction que celle de $\vec{a}$ et de $\vec{d}$!

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x = 2\alpha-4\beta\\y=-\alpha+2\beta\end{cases} \quad |2|$$

$$x+2y=0$$

$$x=-2y \leadsto \vec{v}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \vec{v}\begin{pmatrix}-2y\\y\end{pmatrix} = y\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} = y\cdot\vec{a}$$

d) $$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x = 2\alpha+3\beta\\y=-\alpha+2\beta\end{cases} \quad |2|$$

$$x+2y = 7\beta$$

$$\beta = \frac{x+2y}{7}$$

$$\hookrightarrow \alpha = 2\beta - y = \frac{2(x+2y)}{7} - \frac{7y}{7} = \frac{2x-3y}{7}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \left(\frac{2x-3y}{7}\right)\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + \left(\frac{x+2y}{7}\right)\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

ex 19

a) $\vec{d} = \alpha \vec{b} + \beta \vec{c} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\alpha + 4\beta \\ 2\alpha - 6\beta \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{array}{l} ① \\ ② \end{array} \begin{cases} 4 = 0\alpha + 4\beta \\ -1 = 2\alpha - 6\beta \end{cases}$

① : $\beta = 1$

dans ② : $-1 = 2\alpha - 6$

$2\alpha = 5$

$\alpha = 5/2$

donc $\vec{d} = \frac{5}{2}\vec{b} + 1\vec{c}$

b) $\vec{d} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{c} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\lambda + 4\mu \\ 3\lambda - 6\mu \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{array}{l} ① \\ ② \end{array} \begin{cases} 4 = -2\lambda + 4\mu \\ -1 = 3\lambda - 6\mu \end{cases} \left| \begin{array}{c} 3 \\ +2 \end{array} \right|$

$+$

$10 = 0$

$S = \emptyset$

on ne peut pas écrire $\vec{d}$ comme comb. linéaire de $\vec{a}$ et $\vec{c}$

c) $\vec{d} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \gamma \vec{c} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{array}{l} ① \\ ② \end{array} \begin{cases} 4 = -2\lambda + 0\mu + 4\gamma \\ -1 = 3\lambda + 2\mu - 6\gamma \end{cases} \left| \begin{array}{c} 3 \\ 2 \end{array} \right|$

$+$

$10 = 0\lambda + 4\mu + 0\gamma$

$\mu = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

Il y a plusieurs choix possibles (une infinité !) pour λ et γ

① : $4 = -2\lambda + 4\gamma$

prenons $\lambda = 0$: $\gamma = 1$

Une solution : $\vec{d} = 0\vec{a} + \frac{5}{2}\vec{b} + 1\vec{c}$

prenons $\lambda = 1$: $4\gamma = 4 + 2 \cdot 1 = 6$

$\gamma = 3/2$

une autre solution : $\vec{d} = 1\vec{a} + \frac{5}{2}\vec{b} + \frac{3}{2}\vec{c}$

etc...

ex 20

$\vec{v}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

on veut • $\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2+b^2} = 4$

• $a = 2b$

donc $\sqrt{(2b)^2+b^2} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{5b^2} = 4 \Leftrightarrow \pm\sqrt{5}\, b = 4$

$\Leftrightarrow b = \pm \frac{4}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \pm \frac{4\sqrt{5}}{5}$

si $b = \frac{4\sqrt{5}}{5}$; $a = 2b = 8\sqrt{5}/5$

si $b = -\frac{4\sqrt{5}}{5}$; $a = 2b = -8\sqrt{5}/5$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 8\sqrt{5}/5 \\ 4\sqrt{5}/5 \end{pmatrix}$ ou $\vec{v} = \begin{pmatrix} -8\sqrt{5}/5 \\ -2\sqrt{5}/5 \end{pmatrix}$

ex 21

on cherche $\vec{w}$ tel que $\vec{w} = \lambda \vec{v}$ et $\|\vec{w}\| = 1$

d'où : $\vec{w} = \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad \|\vec{w}\| = \sqrt{(4\lambda)^2+(2\lambda)^2}$$
$$= \sqrt{16\lambda^2+4\lambda^2}$$
$$= \sqrt{20\lambda^2}$$
$$= \sqrt{4\lambda^2 \cdot 5}$$
$$= \pm 2\lambda\sqrt{5}$$
$$= 2\lambda\sqrt{5} \quad \text{(car une norme est toujours positive)}$$

on veut $\|\vec{w}\| = 1 \Leftrightarrow 2\lambda\sqrt{5} = 1$

$\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right) = \frac{\sqrt{5}}{2 \cdot 5} = \frac{\sqrt{5}}{10}$

donc : $\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \cdot \sqrt{5}/10 \\ 2\sqrt{5}/10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{5}/5 \\ \sqrt{5}/5 \end{pmatrix}$

ex 22 a) $3\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\0\\-11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\10\\-26\end{pmatrix}$

b) $\vec{AB}\begin{pmatrix}2-1\\4-2\\5-(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\8\end{pmatrix}$ $\quad \vec{BA}\begin{pmatrix}-1\\-2\\-8\end{pmatrix}$

c) $\vec{OA}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\overset{?}{=}\lambda\cdot\vec{OB}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\overset{?}{=}\begin{pmatrix}2\lambda\\4\lambda\\5\lambda\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}1=2\lambda\\2=4\lambda\\-3=5\lambda\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=1/2\\\lambda=1/2\\\lambda=-3/5\end{cases}$

non! $\nexists\,\lambda\in\mathbb{R}$ tq $\vec{OA}=\lambda\vec{OB}$

donc O, A et B ne sont pas alignés

d) $\vec{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\8\end{pmatrix}\overset{?}{=}\lambda\begin{pmatrix}0-1\\0-2\\-11-(-3)\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\2\\8\end{pmatrix}\overset{?}{=}\lambda\begin{pmatrix}-1\\-2\\-8\end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda=-1$

oui! A, B et C sont alignés

ex 23 b) $\vec{a}\overset{?}{=}\lambda\vec{b}+\gamma\vec{c}$

$\begin{pmatrix}6\\0\\3{,}5\end{pmatrix}\overset{?}{=}\lambda\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}-3\\7\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}① & 6=-3\gamma\\② & 0=4\lambda+7\gamma\\③ & 3{,}5=\lambda\end{cases}$

①: $\gamma=-2$

③: $\lambda=3{,}5$

dans ②? $0\overset{?}{=}4\cdot3{,}5+7(-2)$

$0\overset{?}{=}14-14$ oui!

donc on peut écrire $\vec{a}$ comme comb. lin. de $\vec{b}$ et $\vec{c}$:

$\vec{a}=3{,}5\cdot\vec{b}+(-2)\cdot\vec{c}$

[d'où aussi: $\vec{b}=\frac{1}{3{,}5}\vec{a}+\frac{2}{3{,}5}\vec{c}$

$\vec{c}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3{,}5}{2}\vec{b}$]

b) $\vec{d}\overset{?}{=}\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\overset{?}{=}\alpha\begin{pmatrix}6\\0\\3{,}5\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}-3\\7\\0\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}① & 1=6\alpha-3\gamma\\② & 2=4\beta+7\gamma\\③ & 3=3{,}5\alpha+\beta\end{cases}$ on prend ② $2=4\beta+7\gamma$ ③ $3=3{,}5\alpha+\beta$ $\left|\begin{matrix}1\\-4\end{matrix}\right|$

$$\begin{cases} ② & 2 = 4\beta + 7\gamma \\ ③ & -12 = -14\alpha - 4\beta \end{cases}$$

$$④ \quad -10 = -14\alpha + 7\gamma$$

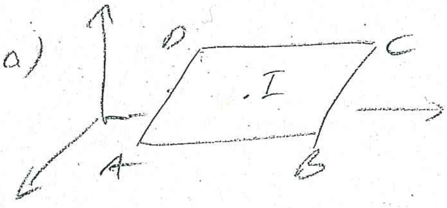
on prend ④ et ① :

$$\begin{array}{ll} ① & 1 = 6\alpha - 3\gamma \quad |\ 7 \\ ④ & -10 = -14\alpha + 7\gamma \quad |\ 3 \\ \hline ⑤ & -23 = 0\alpha + 0\gamma \ !! \end{array}$$

impossible

donc $\vec{d}$ ne s'écrit pas comme combinaison linéaire de $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$

ex 24

a) 

à voir : $\overrightarrow{AD} \overset{?}{=} \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB} \overset{?}{=} \overrightarrow{DC}$

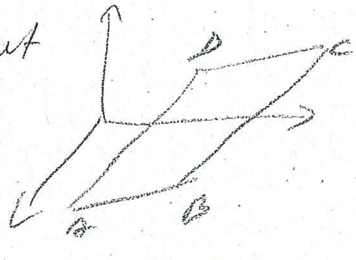
$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \checkmark \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \checkmark$$

b) $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-3 \\ y-(-1) \\ z-2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3 = 2{,}5 \\ y+1 = 3 \\ z-2 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5{,}5 \\ y = 2 \\ z = -2 \end{cases}$$

donc $I = (5{,}5\,;\ 2\,;\ -2)$

ex 25

on veut 

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ | ou $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-x \\ 3-y \\ 2-z \end{pmatrix} \quad \Bigg| \quad \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 4-x \\ 1 = 3-y \\ -2 = 2-z \end{cases} \quad \Bigg| \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 4 \end{cases} \quad \Bigg| \quad D(3\,;2\,;4)$$

$D(3\,;2\,;4)$

ex25

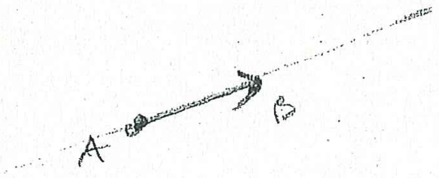
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 11-(-1) \\ 6-0 \\ -5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AQ}\begin{pmatrix} 23-(-1) \\ 12-0 \\ -10-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 12 \\ -11 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AQ} \neq k\cdot\overrightarrow{AB}$, donc $Q \notin d_{AB}$

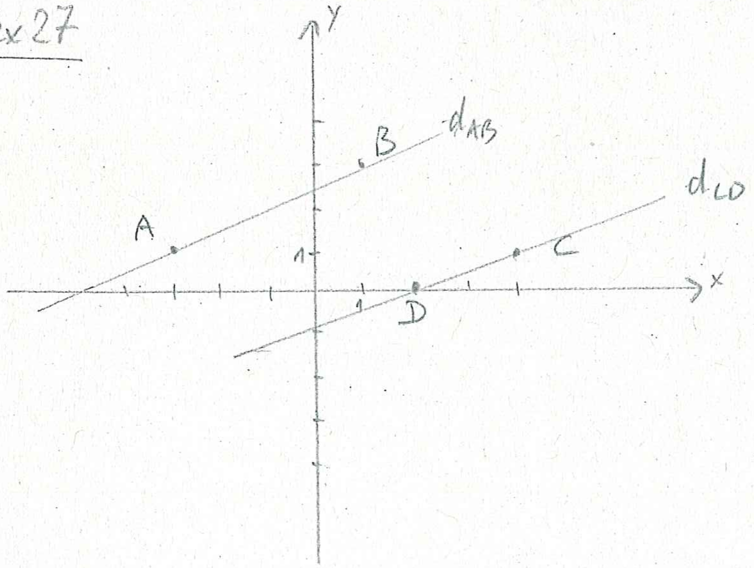
$\overrightarrow{AR}\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\quad 1{,}5\cdot\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AB}$, donc $R \in d_{AB}$

$\overrightarrow{AT}\begin{pmatrix} -20 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix}$ $\quad -\frac{5}{3}\cdot\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AT}$, donc $T \in d_{AB}$

Comme $\overrightarrow{AR} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, c'est $R \in [AB]$



ex 27



Conj : $d_{AB} \parallel d_{CD}$

dém : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1-(-3) \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 2-4 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

on a : $-2 \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$

donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires

donc $d_{AB} \parallel d_{CD}$

ex 28

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1-(-3) \\ 3-1 \\ -5-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} x-4 \\ 0-1 \\ z-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-4 \\ -1 \\ z \end{pmatrix}$

$d_{AB} \parallel d_{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}^* \text{ tq } k\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

$\Leftrightarrow k\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-4 \\ -1 \\ z \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4k \\ 2k \\ -12k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-4 \\ -1 \\ z \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} ① \ 4k = x-4 \\ ② \ 2k = -1 \\ ③ \ -12k = z \end{cases}$

② : $k = -1/2$

dans ① $4(-\frac{1}{2}) = x-4$

$\Leftrightarrow -2 = x-4$

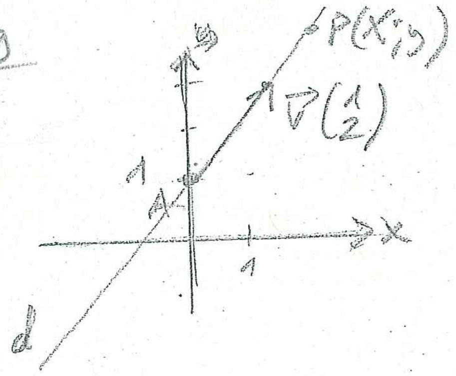
$\Leftrightarrow x = 2$

dans ③ : $-12(-\frac{1}{2}) = z$

$\Leftrightarrow z = 6$

$\boxed{x = 2 \text{ et } z = 6}$

ex 29



Soit $P(x;y) \in d$:

$P \in d \iff \vec{AP} = \lambda \vec{v}$ avec un $\lambda \in \mathbb{R}$

$\iff \begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ éq. vectorielle

$\iff \begin{cases} x = \lambda \\ y-1 = 2\lambda \end{cases}$ syst. éq. paramétriques

Résoudre le système :

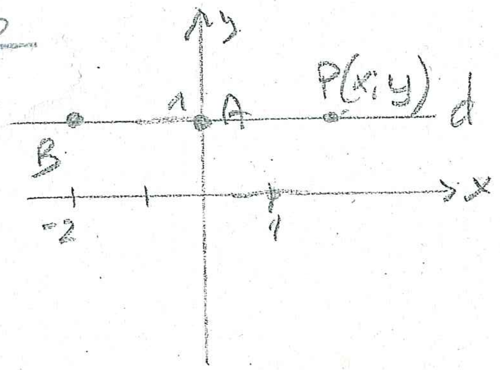
$\begin{array}{l} ① \\ ② \end{array} \begin{cases} x = \lambda \\ y-1 = 2\lambda \end{cases} \begin{vmatrix} -2 \\ 1 \end{vmatrix}$

$\iff \begin{array}{l} ① \\ ② \end{array} \begin{cases} -2x = -2\lambda \\ y-1 = 2\lambda \end{cases}$

$+$

$-2x + y - 1 = 0$: équation cartésienne de d

ex 30



un vecteur directeur de d : $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -2-0 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$P \in d \iff \vec{AP} = \lambda \vec{AB}$

$\iff \begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ éq. vectorielle

$\iff \begin{pmatrix} x \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\lambda \\ 0 \end{pmatrix}$

Résoudre le système : $\begin{array}{l} ① \\ ② \end{array} \begin{cases} x = -2\lambda \\ y-1 = 0 \end{cases}$ syst. d'éq. paramétriques

② donne immédiatement $y-1=0$
$\iff y = 1$ éq. cart

Remarque : en voyant la repr. graphique, on voyait directement l'éq. cartésienne de d : $y = 1$!

ex 31

a) $\vec{AB}\begin{pmatrix}3-12\\2-(-5)\\1/2-(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9\\7\\3,5\end{pmatrix}$ $\qquad \vec{AB} \neq k\vec{AC}$

$\vec{AC}\begin{pmatrix}0-12\\0-(-5)\\-7-(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12\\5\\-4\end{pmatrix}$

éq. vect : soit $P(x;y;z)\in\pi$: $\vec{AP}=\lambda\vec{AB}+\mu\vec{AC}$

$$\begin{pmatrix}x-12\\y-(-5)\\z-(-3)\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}-9\\7\\3,5\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-12\\5\\-4\end{pmatrix}$$

éq. cat :
$$\begin{cases}① & x-12=-9\lambda-12\mu\\ ② & y+5=7\lambda+5\mu\\ ③ & z+3=3,5\lambda-4\mu\end{cases}$$

$$\begin{array}{ll}7\cdot① & 7x-84=-63\lambda-84\mu\\ 18\cdot③ & 18z+54=63\lambda-72\mu\\ \hline ④ & 7x+18z-30=-156\mu\end{array}\qquad \begin{array}{ll}7\cdot① & 7x-84=-63\lambda-84\mu\\ 9\cdot② & 9y+45=63\lambda+45\mu\\ \hline ⑤ & 7x+9y-39=-39\mu\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}④ & 7x+18z-30=-156\mu\\ (-4)⑤ & -28x-36y+156=+156\mu\\ \hline & [-21x-36y+18z+126=0]\end{array}$$

Vérif : $A\overset{?}{\in}\pi$: $-21\cdot12-36(-5)+18(-3)+126\overset{?}{=}0$ ✓

$B\overset{?}{\in}\pi$: $-21\cdot3-36\cdot2+18\left(\frac{1}{2}\right)+126\overset{?}{=}0$ ✓

$C\overset{?}{\in}\pi$: $0+0-7\cdot18+126\overset{?}{=}0$ ✓

b) $\vec{AB}\begin{pmatrix}3-2\\4-0\\1-(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}$ $\qquad \vec{AB}\neq k\vec{AC}$

$\vec{AC}\begin{pmatrix}-1-2\\-1-0\\0-(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\-1\\2\end{pmatrix}$

éq. vect : $P\in\pi \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-2\\y-0\\z-(-2)\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\4\\3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-3\\-1\\2\end{pmatrix}$

éq. cart : $\begin{cases} x-2 = \lambda - 3\mu & (1) \\ y = 4\lambda - \mu & (2) \\ z+2 = 3\lambda + 2\mu & (3) \end{cases}$

$$\begin{array}{rl} (1) & x-2 = \lambda - 3\mu \\ -3\cdot(2) & -3y = -12\lambda + 3\mu \\ \hline (4) & x-3y-2 = -11\lambda \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 2\cdot(2) & 2y = 8\lambda - 2\mu \\ (3) & z+2 = 3\lambda + 2\mu \\ \hline & 2y+z+2 = 11\lambda \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} (4) & x-3y-2 = -11\lambda \\ (5) & 2y+z+2 = 11\lambda \\ \hline & [\ x-y+z=0\ ] \end{array}$$

Vérif : $A \overset{?}{\in} \pi$: $2-0+(-2) \overset{?}{=} 0$ ✓

$B \overset{?}{\in} \pi$: $3-4+1 \overset{?}{=} 0$ ✓

$C \overset{?}{\in} \pi$: $1-(-1)+0 \overset{?}{=} 0$ ✓

c) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3-4 \\ 5-5 \\ 7-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 10-4 \\ 5-5 \\ 1-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$ $\Big\}$ $\overrightarrow{AB} \neq k\overrightarrow{AC}$ ✓

éq. vect : $P(x;y;z) \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-4 \\ y-5 \\ z-6 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

éq. cart : $\begin{cases} x-4 = -\lambda + 6\mu & (1) \\ y-5 = 0 & (2) \\ z-6 = \lambda - 5\mu & (3) \end{cases}$

l'équation est déjà là ! (2) $y-5=0$

càd $[\ 0\cdot x + y + 0\cdot z - 5 = 0\ ]$

vérif immédiate : $A, B, C \in \pi$ ✓

d) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3-(-3) \\ -4-2 \\ 20-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 15 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 0-(-3) \\ 0-2 \\ 10-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} \neq k \cdot \overrightarrow{AC}$ ✓

éq. vect : $P(x;y;z) \in \Pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-(-3) \\ y-2 \\ z-5 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 15 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

éq. cart : $\begin{cases} ① \; x+3 = 6\lambda + 3\mu \\ ② \; y-2 = -6\lambda - 2\mu \\ ③ \; z-5 = 15\lambda + 5\mu \end{cases}$

① $x+3 = 6\lambda + 3\mu$
② $y-2 = -6\lambda - 2\mu$

$x+y+1 = \mu$

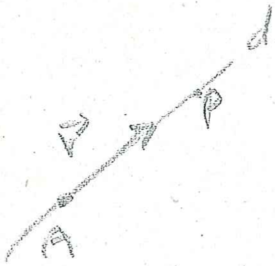
$5\cdot$② $5y-10 = -30\lambda - 10\mu$
$2\cdot$③ $2z-10 = 30\lambda + 10\mu$

$5y+2z-20 = 0$

on obtient l'équation de Π

vérif : $A \in \Pi$: $5(2)+2(5)-20=0$ ✓
$B \in \Pi$: $5(-4)+2\cdot 20-20=0$ ✓
$C \in \Pi$: $5(0)+2\cdot 10-20=0$ ✓

ex 32



$P(x;y;z) \in d \iff \overrightarrow{AP} = \lambda \vec{v}$

$\iff \begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \\ z-3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ éq. vectorielle de d

$\iff \begin{cases} ① \; x+2 = 2\lambda \\ ② \; y-1 = \lambda \\ ③ \; z-3 = -\lambda \end{cases}$ Syst. éq. paramétriques de d

$\begin{cases} ① \; \frac{x+2}{2} = \lambda \\ ② \; y-1 = \lambda \\ ③ \; \frac{z-3}{-1} = \lambda \end{cases}$ d'où $\lambda = \left[\frac{x+2}{2} = y-1 = -z+3\right]$

$x+2 = 2y$ et $y+z = 4$ éq. cart de d

ex 33

$P(x;y;z) \in d \iff \overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}$

$\iff \begin{pmatrix} x-0 \\ y-1 \\ z-0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ éq. vect de d

$\iff \begin{cases} ① \; x = -2\lambda \\ ② \; y-1 = 0 \\ ③ \; z = 3\lambda \end{cases}$

$\iff \begin{cases} ① \; -\frac{x}{2} = \lambda \\ ② \; y-1 = 0 \\ ③ \; \frac{z}{3} = \lambda \end{cases}$ d'où $\lambda = \left[-\frac{x}{2} = \frac{z}{3}\right]$ et $y = 1$

$-3x = 2z$ et $y = 1$ éq. cart de d