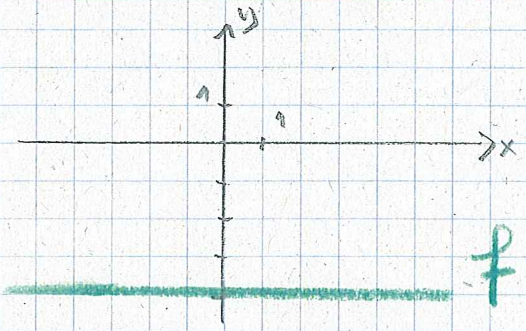
MATH 3e Ch1 exercices Corrigés

ex 1 a) f est une fct polynomiale de degré 0

à savoir	ALG (équation)		FONCTION		GEOM
	$y = k$ (avec $k \in \mathbb{R}$)	$\Leftrightarrow$	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to k$ ou $f(x) = k$	$\Leftrightarrow$	droite horizontale



$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$x \mapsto -4$

ou [si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ implicite]
$f(x) = -4$

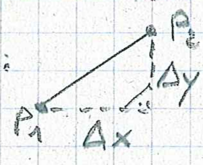
$D_f = \mathbb{R}$, car aucun $x \in \mathbb{R}$ ne pose de problème pour calculer son image par f

$Z_f = \emptyset$, car aucun $x \in \mathbb{R}$ n'a 0 comme image

b) f est une fct polynomiale de degré 1

à savoir	ALG	FCT	GEOM
	$y = ax + b$ (où $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$); a : pente, b : ordonnée origine	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax + b$ ou $f(x) = ax+b$	droite oblique

Définition :

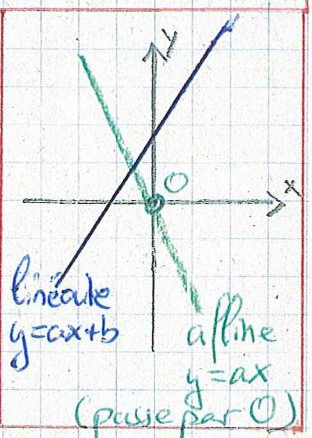


pente segment $[P_1 P_2] = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

à savoir

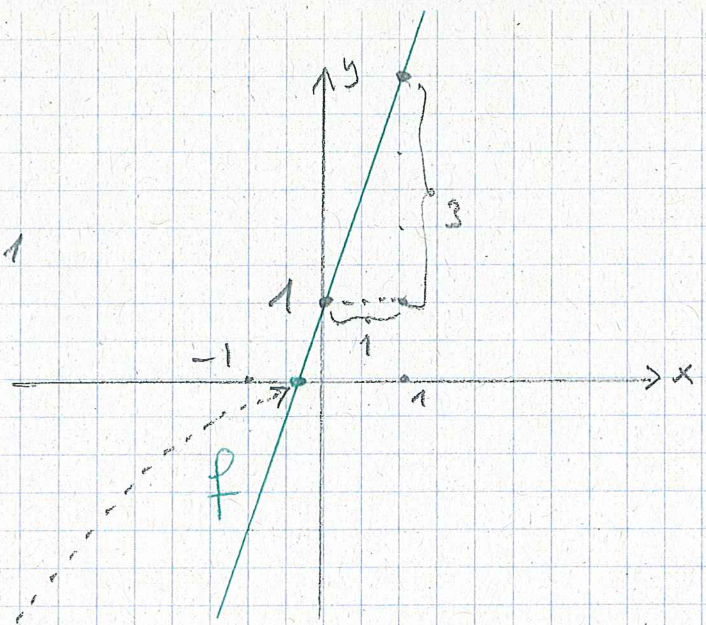
Théorème : la pente d'une droite est indépendante du choix des 2 pts choisis pour la calculer

dém : cf thm Thalès



$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto 3x+1$$

$$f(x) = 3x+1 = \frac{3}{1}x + 1$$



$D_f = \mathbb{R}$

Z_f : $3x+1=0$
$3x = -1$
$x = -1/3$

$Z_f = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

c) d) f est une fct polynomiale du 2^e degré

ALG		FCT		GEOM
$y = ax^2+bx+c$ $(a \in \mathbb{R}^*; b, c \in \mathbb{R})$	$\Leftrightarrow$	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax^2+bx+c$	$\Leftrightarrow$	parabole $\cap$ ou $\cup$

à savoir

→ $a > 0 \Leftrightarrow \cup$
$a < 0 \Leftrightarrow \cap$ concave

→ $x_0 = -\frac{b}{2a}$: axe de symétrie

→ $\Delta = b^2 - 4ac$ ⇒

	Résoudre l'équation $ax^2+bx+c=0$	Factoriser l'expressio[n] ax^2+bx+c
$\Delta < 0$	$S = \emptyset$	non factorisable
$\Delta = 0$	$x_0 = -\frac{b}{2a}$ unique sol	$a(x-x_0)^2$
$\Delta > 0$	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$	$a(x-x_1)(x-x_2)$

→ $\left(-\frac{b}{2a} ; -\frac{\Delta}{4a}\right)$: sommet

→ 3 écritures : formes développée // factorisée (si elle existe) // standard $\left(y = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a}\right)$

→ pour factoriser/chercher Z_f : ne pas oublier la 4^e id. rem.

c) $f(x) = x^2 + 6x - 7$

$= (x+7)(x-1)$

$Z_f : f(x) = 0 \Leftrightarrow (x+7)(x-1) = 0$

$x = -7$ ou $x = 1$

$Z_f = \{-7; 1\}$

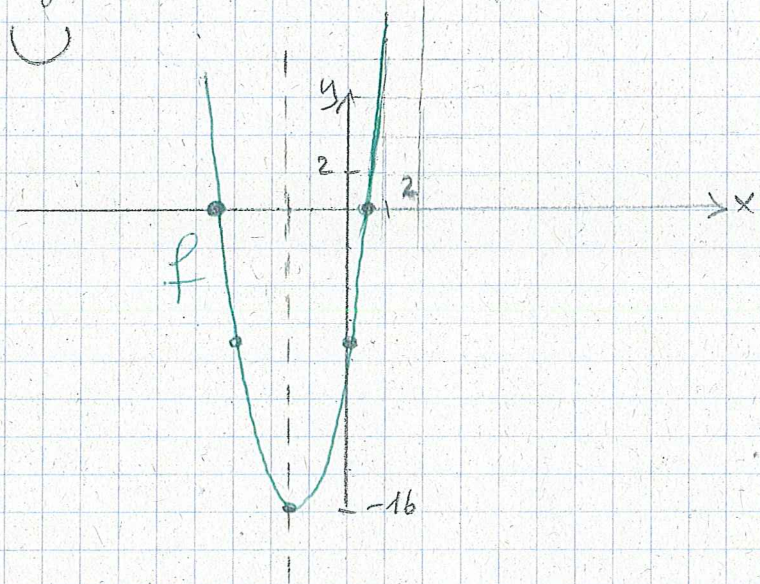
$D_f = \mathbb{R}$

axe sym: $x = \frac{-6}{2} = -3$

sommet: $f(-3) = -16 \Rightarrow S = (-3; -16)$

$a > 0 \Rightarrow \cup$

$f(0) = -7$



d) $f(x) = -6x^2 - x + 2$

$\Delta = (-1)^2 - 4(-6)\cdot 2 = 49$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{-12} = \frac{1 \pm 7}{-12} \to x_1 = +\frac{1}{2}$

$\to x_2 = -\frac{2}{3}$

$\Rightarrow f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

$= -6\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

$Z_f = \left\{-\frac{2}{3}; \frac{1}{2}\right\}$

$D_f = \mathbb{R}$

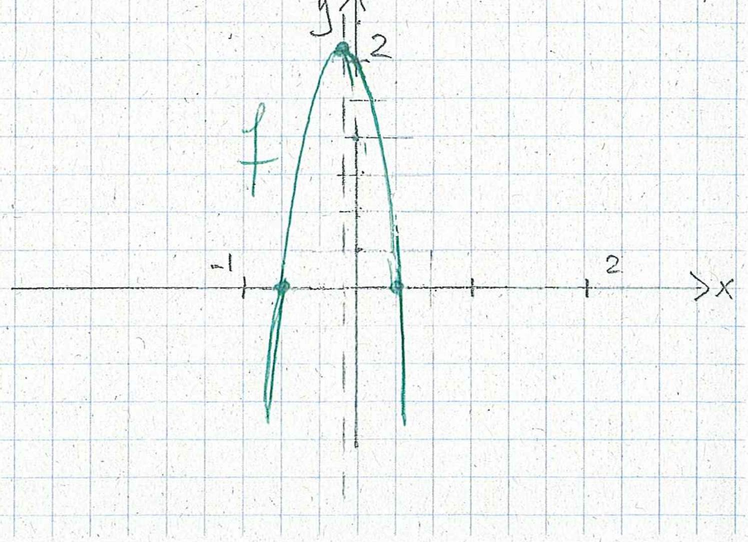
axe sym: $x = \frac{1}{-12} = -\frac{1}{12}$

sommet: $S = \left(-\frac{1}{12}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$

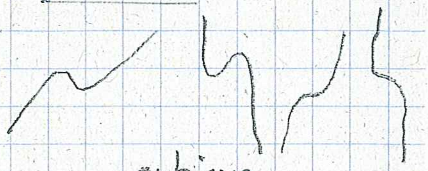
$= \left(-\frac{1}{12}; \frac{49}{24}\right)$

$a < 0 : \cap$

$f(0) = 2$



e), f) f est une fct polynomiale de degré 3

ALG	FCT	GEOM
$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $(a \in \mathbb{R}^*;\ b, c, d \in \mathbb{R})$ $\Leftrightarrow$	$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$ $\Leftrightarrow$	 cubique

à savoir

→ recherche des zéros [si ils sont entiers ou rationnels...]

↳ factorisation : 1°/ mise en évidence
2°/ id. remarquables
3°/ trucs
4°/ division polynomiale

→ pas de symétrie systématique dans la repr. graphique
→ pas de moyen immédiat de déterminer min/max

} utiliser tableau de signes

e) $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

$= x^2(x-2) - (x-2)$ ↙ pas de mise en év → pas d'id rem → truc...

$= (x-2)\left[x^2 - 1\right]$

$= (x-2)(x-1)(x+1)$

Z_f : $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1)(x+1) = 0$

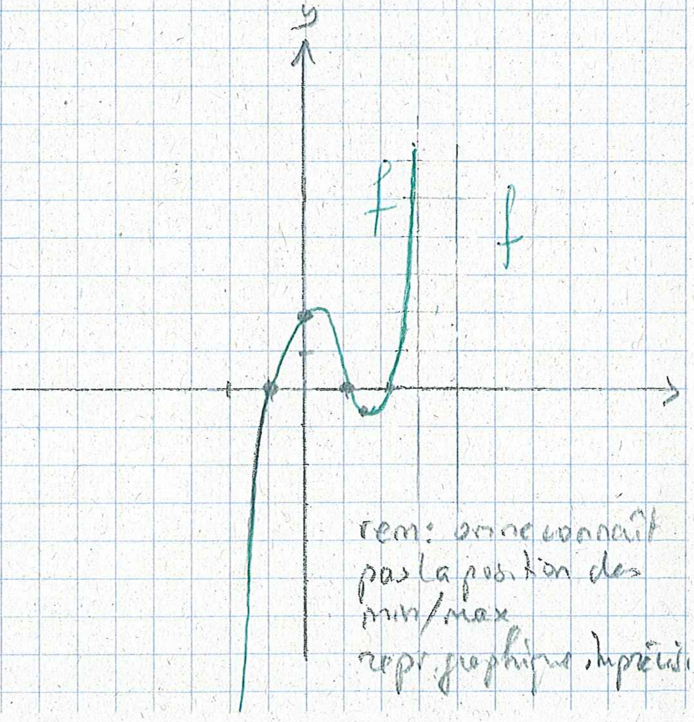
$x = 2$ ou $x = 1$ ou $x = -1$

$Z_f = \{-1; 1; 2\}$

$D_f = \mathbb{R}$

tableau de signes :

x		-1		1		2	
$x-2$	−	−	−	−	−	0	+
$x-1$	−	−	−	0	+	+	+
$x+1$	−	0	+	+	+	+	+
$f(x)$	−	0	+	0	−	0	+



Quelques images :

$f(0) = 2$

$f(-2) = -8 - 8 + 2 + 2 = -12$

$f\left(\frac{3}{2}\right) = -0,625$

rem : on ne connaît pas la position des min/max
repr. graphique imprécise

f) $f(x) = 3x^3 + 8x^2 - 1$

$D_f = \mathbb{R}$

Z_f : $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^3 + 8x^2 - 1 = 0$

pas de mise en év., pas d'id rem
pas de trucs ...
$\Rightarrow$ div. polyn !

- on cherche un zéro entier parmi les diviseurs de -1

$f(1) = 3 \cdot 1^3 + 8 \cdot 1^2 - 1 \neq 0$

$f(-1) = 3(-1)^3 + 8(-1) - 1 \neq 0$ $\Rightarrow$ il n'y a pas de zéro entier !

- on cherche un zéro rationnel parmi les fractions suivantes : $\left\{\frac{\pm 1}{\pm 3}\right\} = \left\{-\frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right\}$

$f\left(\frac{1}{3}\right) = 3 \cdot \frac{1}{27} + 8 \cdot \frac{1}{9} - 1 = \frac{1}{9} + \frac{8}{9} - 1 = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}$ est un zéro de f

$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{3}\right)$ divise $f(x)$

-

$$
\begin{array}{r|l}
3x^3 + 8x^2 - 1 & x - 1/3 \\ \cline{2-2}
-\ \underline{3x^3 - x^2} & 3x^2 + 9x + 3 \\
9x^2 - 1 & \\
-\ \underline{9x^2 - 3x} & \\
3x - 1 & \\
-\ \underline{3x - 1} & \\
0 &
\end{array}
$$

d'où $f(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right)(3x^2 + 9x + 3)$
$= \left(x - \frac{1}{3}\right) 3 (x^2 + 3x + 1)$

cherchons les zéros de $g(x)$:

$\Delta = 9 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 5$

$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ $\rightarrow x_1 \simeq -2,6$; $\rightarrow x_2 \simeq -0,38$

$Z_g = \left\{\frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$ et $g(x) = \left(x - \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right)$

donc $Z_f = \left\{\frac{-3-\sqrt{5}}{2} ; \frac{-3+\sqrt{5}}{2} ; \frac{1}{3}\right\}$ et $f(x) = \left(x - \frac{1}{3}\right)\underbrace{\left(x - \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{-3-\sqrt{5}}{2}\right)}_{g(x),\ \text{pol de degré } 2}$

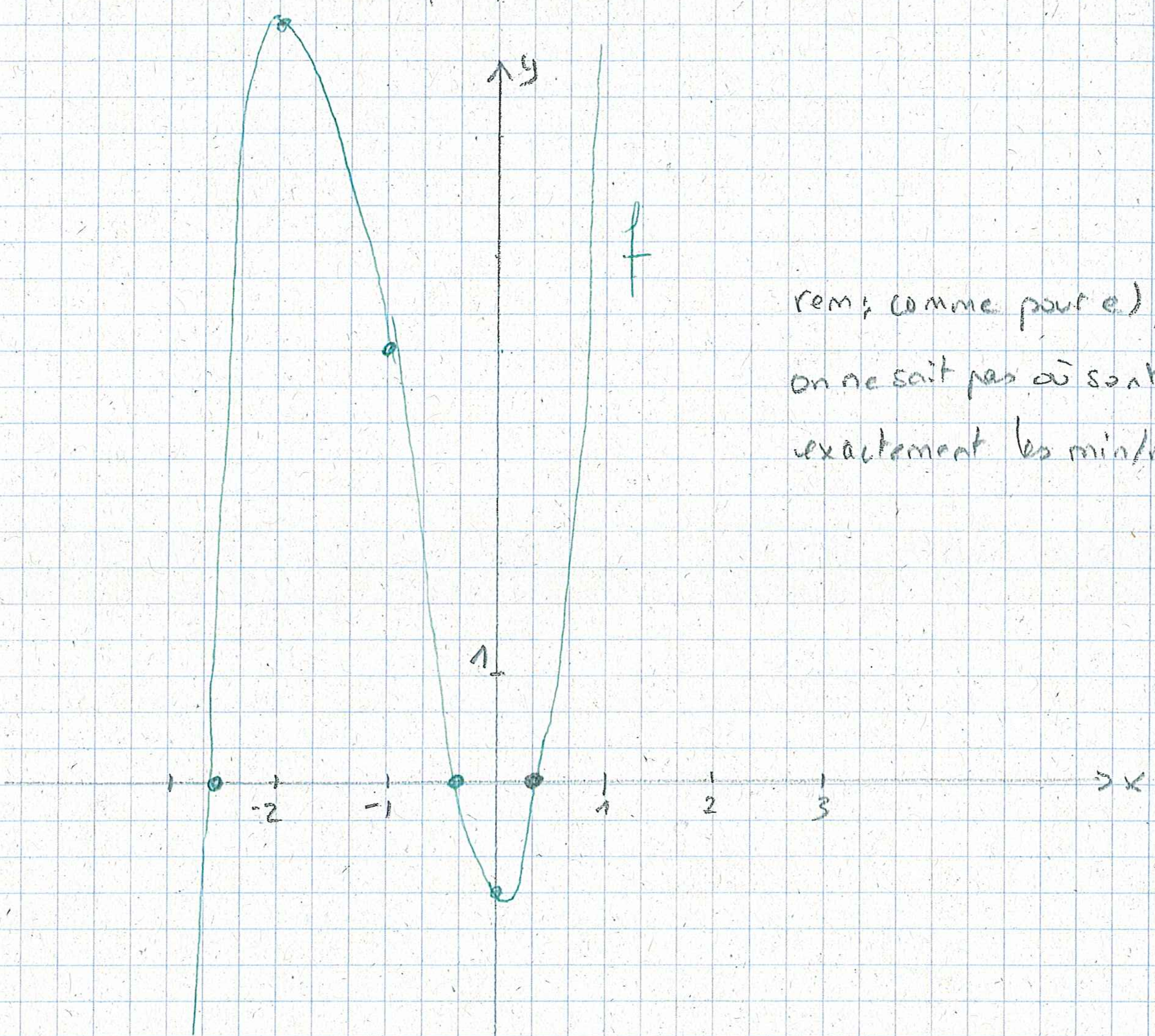
- tableau de signes

x		$\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$		$1/3$	
$x - 1/3$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

• quelques images : $f(0) = -1$ $\quad f(-2) = 7$

$f(-1) = 4$

$f(1) = 10$



rem : comme pour e), on ne sait pas où sont exactement les min/ma

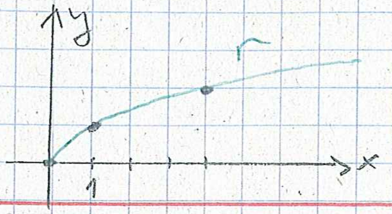
g) $f(x) = \sqrt{2x-1}$ (composition d'une fct polynomiale avec la fct élémentaire $\sqrt{\ }$)

à savoir

- $\sqrt{a} = b \Leftrightarrow b$ est le nombre <u>positif</u> dont le carré vaut a

donc ⚠ $\sqrt{4} = 2$ et non $\sqrt{4} = \pm 2$, ce qui est faux !

- fct élémentaire "racine carrée" $r : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$



D_f : pb si $2x-1 < 0$ $\downarrow +1$

$\Leftrightarrow 2x < 1$ $\downarrow :2$

$\Leftrightarrow x < 1/2$

donc $D_f = \mathbb{R} \setminus]-\infty ; \frac{1}{2}[$ ou $D_f = [\frac{1}{2} ; +\infty[$

Z_f : $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = 0$

$\Leftrightarrow 2x-1 = 0$

$\Leftrightarrow 2x = 1$

$\Leftrightarrow x = 1/2$

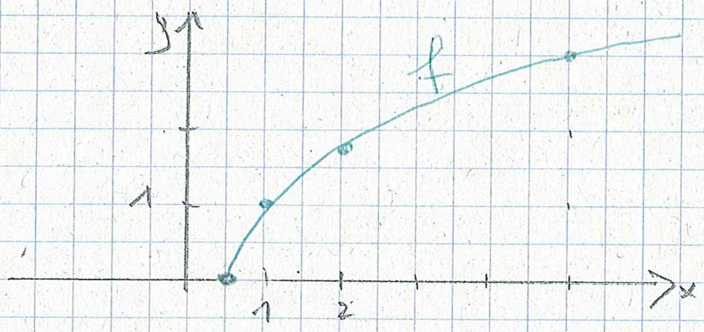
$Z_f = \{1/2\}$

Quelques images :

$f(1) = 1$

$f(2) = \sqrt{3}$

$f(5) = 3$



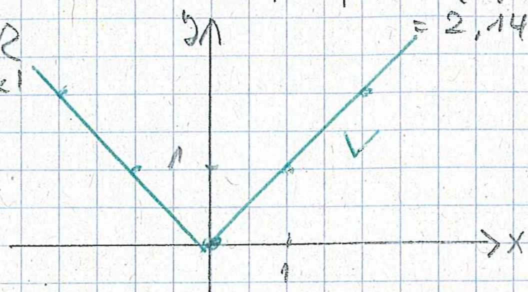
h) $f(x) = |-2x+3|$ (fct élémentaire "valeur absolue" composée avec fct polyn.)

- définition : $|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$

exples : $|17,3| = 17,3$

$|-2,14| = -(-2,14)$
$= 2,14$

- fct élémentaire "valeur absolue" $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \longmapsto |x|$

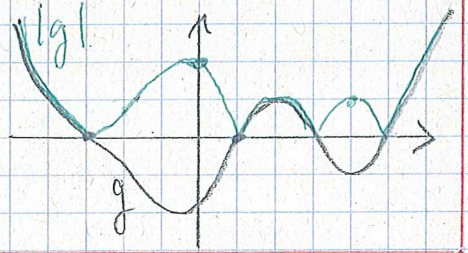


- définition :

$|g(x)| = \begin{cases} g(x) & si\ g(x) \geq 0 \\ -g(x) & si\ g(x) < 0 \end{cases}$

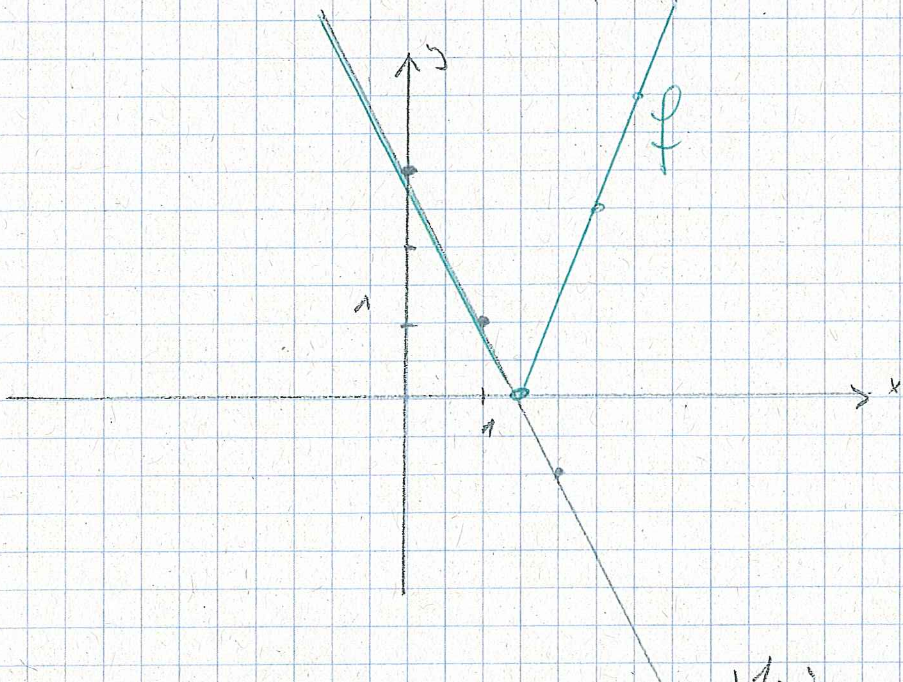
Savoir

- la représentation graphique de $|g(x)|$ s'obtient à partir de celle de $g(x)$ par symétrie d'axe $y=0$ pour les valeurs négatives, les valeurs positives restant inchangées



D_f : $\mathbb{R}$ [aucune valeur $x \in \mathbb{R}$ ne pose problème pour calculer $|-2x+3|$

Z_f : $f(x) = 0 \Leftrightarrow |-2x+3| = 0$
$\Leftrightarrow -2x+3 = 0$
$\Leftrightarrow -2x = -3$
$\Leftrightarrow x = 3/2$ $\qquad Z_f = \{\frac{3}{2}\}$



g définie par $g(x) = -2x+3$

i) f est une fonction rationnelle

à savoir

- une fraction rationnelle est une fraction du type $\frac{\text{polynôme}}{\text{polynôme}}$
- une fonction rationnelle est une fonction réelle où $f(x)$ est une fraction rat.
- pour déterminer les zéros et une représentation graphique d'une fonction rationnelle, on utilise un tableau de signes, dans lequel on peut également faire apparaître les asymptotes de f

$$f(x) = \frac{-x^2+3x}{2x^2+4x+2} = \frac{-x(x-3)}{2(x^2+2x+1)} = \frac{-x(x-3)}{2(x+1)^2}$$ forme factorisée

D_f : problème si $2(x+1)^2 = 0$
$\Leftrightarrow (x+1)^2 = 0$
$\Leftrightarrow (x+1) = 0$
$x = -1$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Z_f : $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-x(x-3)}{2(x+1)^2} = 0$

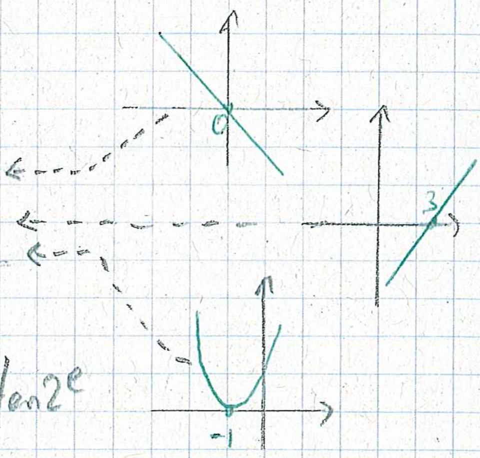
$\Leftrightarrow -x(x-3) = 0$ ($\Leftrightarrow x \in D_f$)

$x = 0$ ou $x = 3$

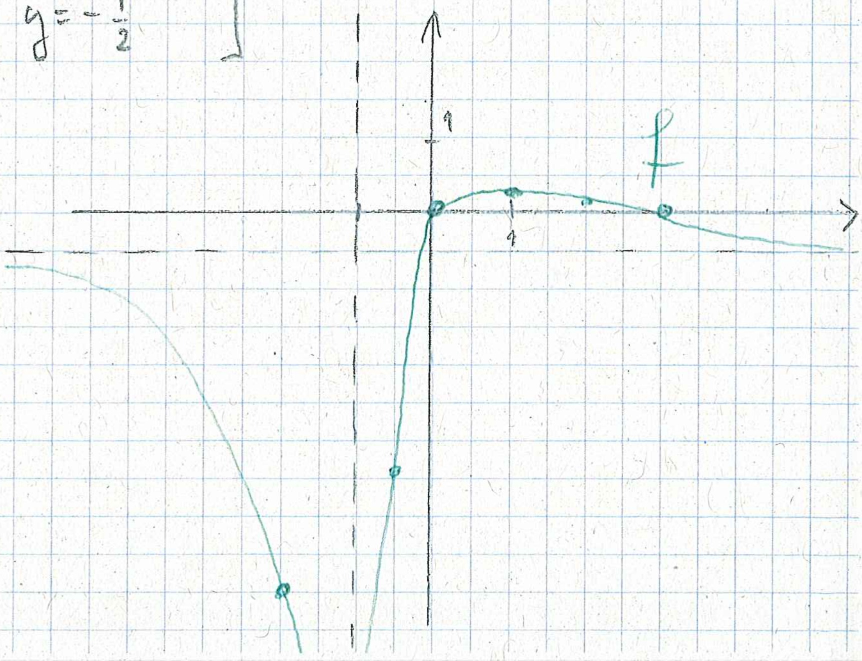
$Z_f = \{0;3\}$

TdS :

x		-1		0		3	
$-x$	+	+	+	0	−	−	−
$x-3$	−	−	−	−	−	0	+
$2(x+1)^2$	+	0	+	+	+	+	+
$f(x)$	−	//	−	0	+	0	−



[asympt. verticale : qd x près de -1
asympt horizontale : $y = -\frac{1}{2}$] facultatif en 2e



Quelques images :

$f(1) = \ldots = 0{,}25$

$f(2) = \ldots = 0{,}11$

$f(-2) = \ldots = -5$

$f(-\frac{1}{2}) = -3{,}5$

A SAVOIR

j) $f(x) = 3\cos(2x - \frac{\pi}{2})$ — Fonction trigonométrique

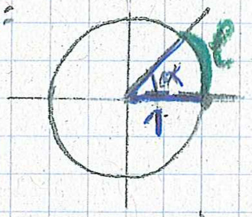
- définition de π : rapport constant entre périmètre et diamètre du cercle

remarques : on démontre que ce rapport est constant, donc ne varie pas en fonction du cercle

on démontre qu'on retrouve le même nombre π pour calculer l'aire d'un cercle : $A = \pi r^2$

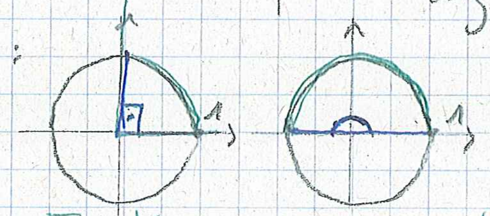
on démontre que π est irrationnel et que $\pi \cong 3,1415...$

- mesure de l'angle en radians :



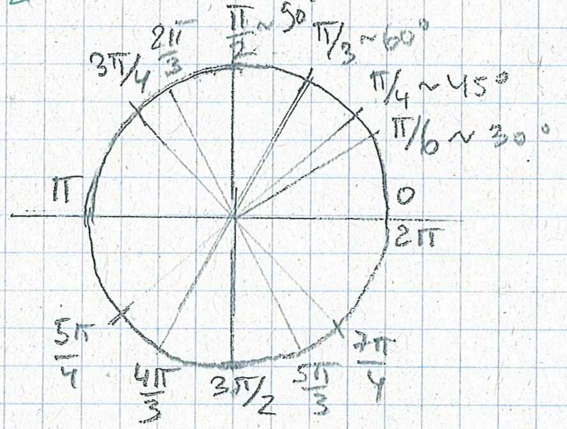
c'est la longueur de l'arc intercepté par l'angle au centre dans un cercle de longueur 1

exples :

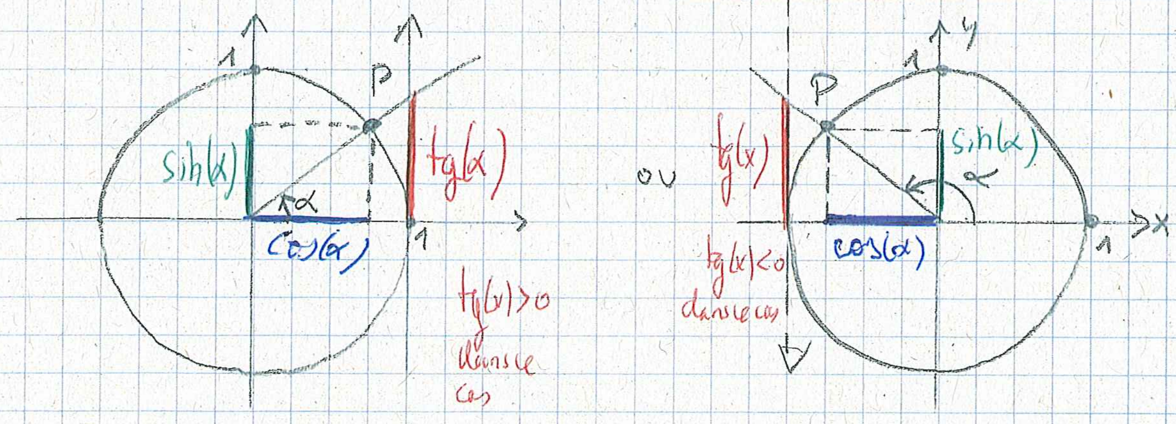


mes $\alpha = \frac{\pi}{2}$, noté $\alpha = \frac{\pi}{2}$ mes $\alpha = \pi$, noté $\alpha = \pi$

- mesures connues en radian :

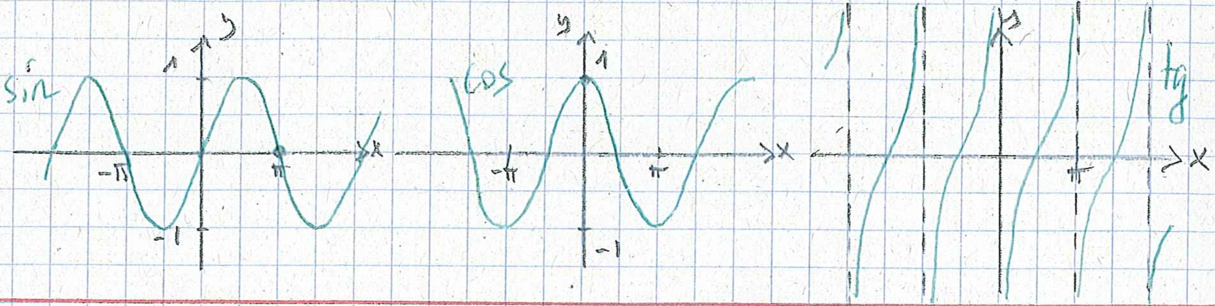


- sin, cos, tg dans le cercle trigonométrique pour un angle orienté α :



Cette définition est cohérente avec celle vue en 1re pour les triangles rectangles et celle vue en 2e pour les triangles quelconques

• représentations graphiques de base

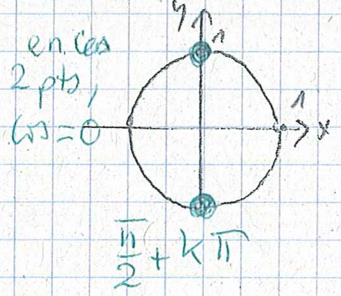


$f(x) = 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$

$D_f = \mathbb{R}$

Z_f : $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$ $\quad \div 3$



$2x - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \Leftrightarrow \quad 2x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\Leftrightarrow \quad 2x = \pi + k\pi$

$\Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2}$ $\quad \div 2$

$Z_f = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\frac{\pi}{2} \text{ où } k \in \mathbb{Z} \right\}$

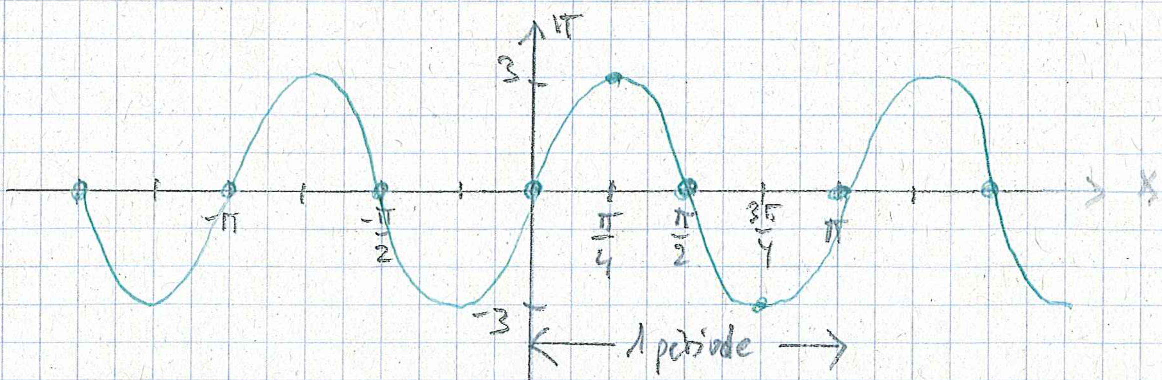
càd $Z_f = \left\{ \dots ; -\frac{\pi}{2} ; 0 ; \frac{\pi}{2} ; \pi ; \frac{3\pi}{2} ; \frac{5\pi}{2} ; \dots \right\}$

Période : comme la fct cos est de période 2π, f est de période π
(on peut aussi la déterminer algébriquement [pas demandé]

Amplitude : comme $\cos(x) \in [-1;1]$, $f(x) \in [-3;3]$

Quelques images : $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3\cos(0) = 3$

$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 3\cos(\pi) = -1$

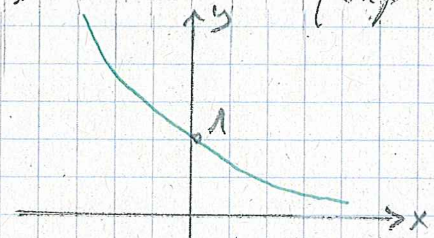


k) l) Fonctions exponentielles

- $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$
  $x \mapsto a^x$ est une fct exponentielle si $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$
  (exp de base a)

- 

cas $0<a<1$



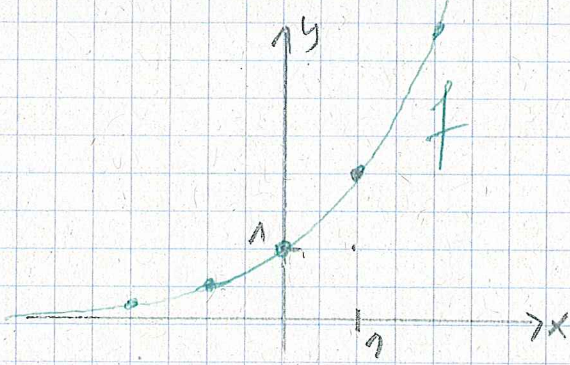
cas $a>1$

- une exponentielle célèbre : $f(x)=e^x$ où e est une constante définie par $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ avec $n \to \infty$
  $e \cong 2,71$ est irrationnel

k) $f(x) = 2^x$

$D_f = \mathbb{R}$

Z_f : $f(x)=0 \Leftrightarrow 2^x = 0$
$S = \emptyset$
$Z_f = \emptyset$



Quelques images : $f(1)=2$; $f(2)=4$; $f(-1)=2^{-1}=\frac{1}{2}$ ...

l) $f(x) = 0,5^x = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

$D_f = \mathbb{R}$

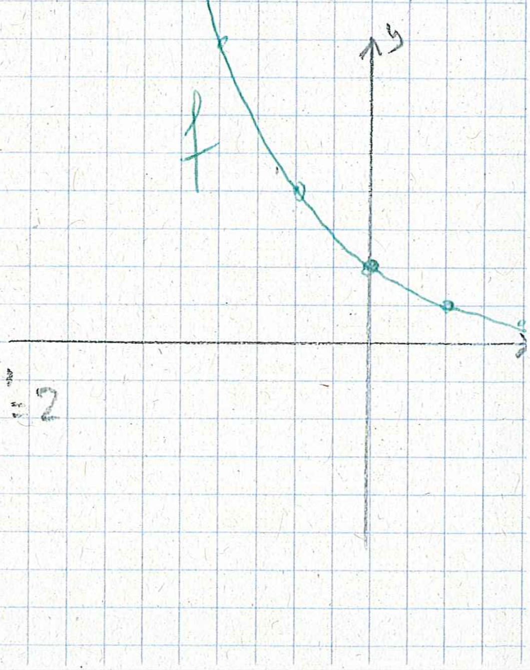
$Z_f = \emptyset$

Quelques images : $f(0) = 0,5^0 = 1$

$f(1) = 0,5$

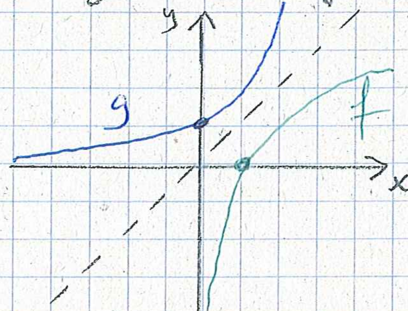
$f(2) = 0,5^2 = 0,25$

$f(-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{2^{-1}} = 2^1 = 2$

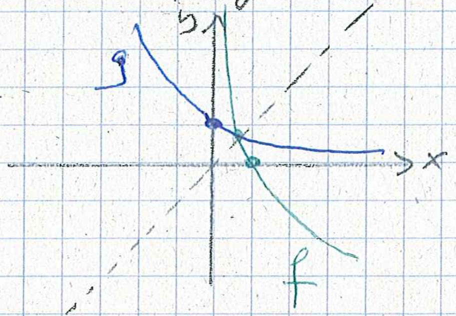


m) n) fonctions logarithmiques

- $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \log_a(x)$ est la réciproque de l'exponentielle $g(x)$ de base a ($a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$), on l'appelle logarithme de base a
- il y a symétrie d'axe $y=x$ entre les repr. graphiques de f et g



cas $a>1$



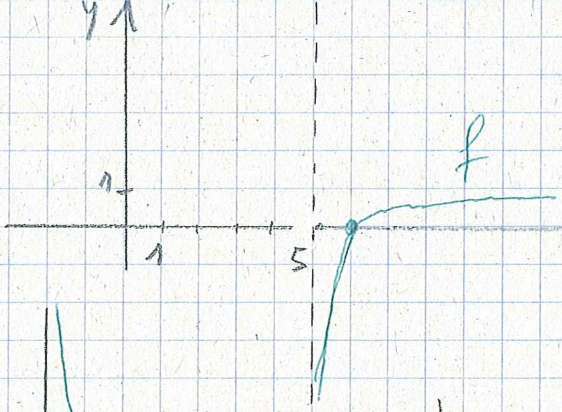
cas $0<a<1$

- $\log_a(1)=0$; $\log_a(a)=1$; $\log_a(a^n)=n$
- théorèmes : si $x,y>0$, alors $\log_a(xy)=\log_a(x)+\log_a(y)$
  si $x>0$, $\log_a(x^z)=z\cdot\log_a(x)$
- $\log(x)=\log_{10}(x)$: log en base 10
  $\ln(x)=\log_e(x)$: log en base e ($e \cong 2{,}71\ldots$)

m) $f(x)=\log(x-5)$

D_f : pb si $x-5\leq 0 \Leftrightarrow x\leq 5$, donc $D_f =]5;\infty[$

Z_f : $f(x)=0 \Leftrightarrow \log(x-5)=0$
$\Leftrightarrow x-5=1$
$\Leftrightarrow x=6$
$Z_f=\{6\}$



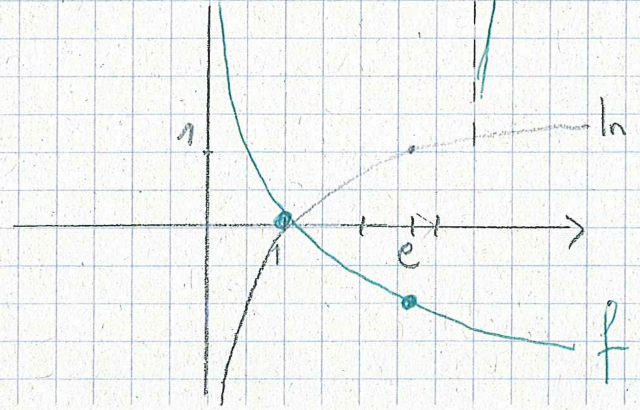
Quelques images : $f(15)=\log(10)=1$

n) $f(x)=-\ln(x)$

$D_f=\mathbb{R}_+^*$

Z_f : $f(x)=0 \Leftrightarrow \ln(x)=0$
$\Leftrightarrow x=1$
$Z_f=\{1\}$

$f(e)=-\ln(e)=-1$



Ch1

ex 4 : $\frac{2}{x} = \frac{5}{3}$ équation rationnelle

- D : pb si $x = 0 \Rightarrow D = \mathbb{R}^*$
- résolution : $\frac{2}{x} = \frac{5}{3}$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x} - \frac{5}{3} = 0 \quad \downarrow -5/3$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\cdot 3 - 5\cdot x}{3\cdot x} = 0 \quad \downarrow \text{dén. commun}$$

$$\Leftrightarrow \frac{6-5x}{3x} = 0$$

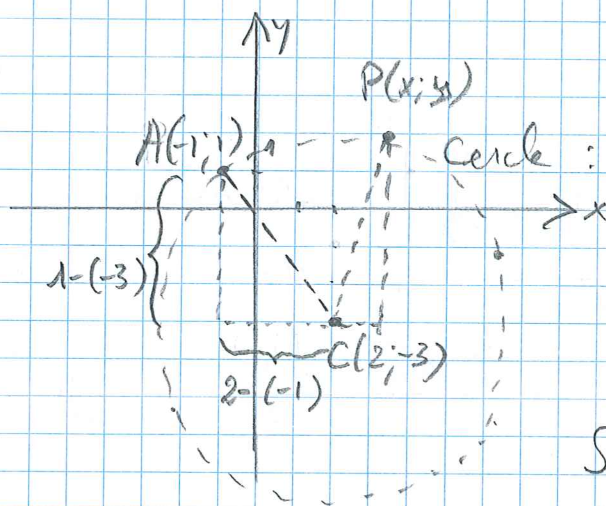
$$\Leftrightarrow 6 - 5x = 0 \quad \downarrow \cdot 3x \text{ [ok car } x \in \mathbb{R}^*]$$

$$\Leftrightarrow 6 = 5x \quad \downarrow +5x$$

$$\Leftrightarrow x = 6/5 \quad \downarrow \div 5$$

- vérif et réponse : $\frac{6}{5} \in D$, donc $S = \{\frac{6}{5}\}$

ex 5



Cercle : centre $C(2;-3)$

rayon : distance entre A et C

$$r = \sqrt{(1-(-3))^2 + (2-(-1))^2}$$

$$= \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$$

Soit $P(x;y)$ un point du cercle

$$\Leftrightarrow \delta(P;C) = r \quad \text{[distance entre P et C vaut r]}$$

on préfère ne pas avoir de $\sqrt{\ }$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2 + (y-(-3))^2} = 5$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 5^2$$

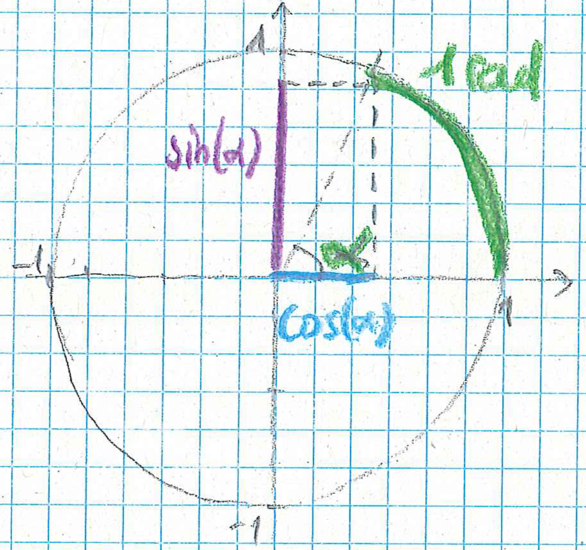
Rappel : équation du cercle de centre $C(c_1;c_2)$ et de rayon r

$$(x-c_1)^2 + (y-c_2)^2 = r^2$$

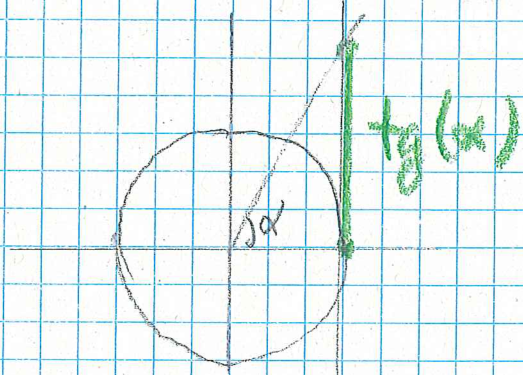
ex 6 π est le rapport (constant) entre périmètre et diamètre du cercle

Question : pourquoi retrouve-t-on le même nombre π dans l'aire du disque ?

Réponse : www.mathkang.org/swf/archimede.html

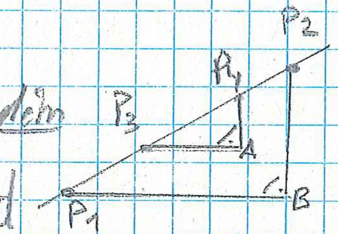


1 [rad] ≅ un peu moins qu'un tiers de $\frac{1}{2}$ tour [car un demi-tour vaut π ≅ 3,14 [rad]]



ex7

a) vrai ; dém

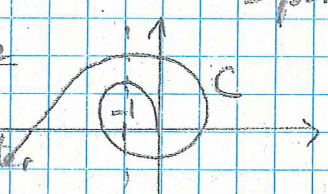


$\Delta P_3AP_4 \sim \Delta P_1BP_2$ (semblables)

donc par thm Thalès, on a :

$$\underbrace{\text{pente}[P_3P_4] = \frac{P_4A}{P_3A} = \frac{P_2B}{P_1B} = \text{pente}[P_1P_2]}_{= \text{pente de } d}$$

b) faux ; contre-exemple



(-1) aurait 3 images
donc C ne peut représenter une fonction

c) faux ; contre-exemple : Ch1 §1 ex 1

nous avons vu que le max n'est pas situé entre les 2 zéros 0 et 0,6 ex 8

a) $f\circ g(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{x-3}{x+1}\right) = 2\left(\frac{x-3}{x+1}\right) - 5$

$= \frac{2x-6-5x-5}{x+1} = \frac{-3x-11}{x+1}$

$g\circ f(x) = g(2x-5) = \frac{(2x-5)-3}{(2x-5)+1} = \frac{2x-8}{2x-4}$

$f\circ f(x) = 2(2x-5)-5 = 4x-15$

$g\circ g(x) = g\left(\frac{x-3}{x+1}\right) = \frac{\frac{x-3}{x+1} - 3}{\frac{x-3}{x+1} + 1} = \frac{\frac{x-3-3x-3}{\cancel{x+1}}}{\frac{x-3+x+1}{\cancel{x+1}}} = \frac{-2x-6}{2x-2}$

si $x \neq -1$

b) $f : x \longmapsto y = 2x-5$

$\Leftrightarrow y+5 = 2x$

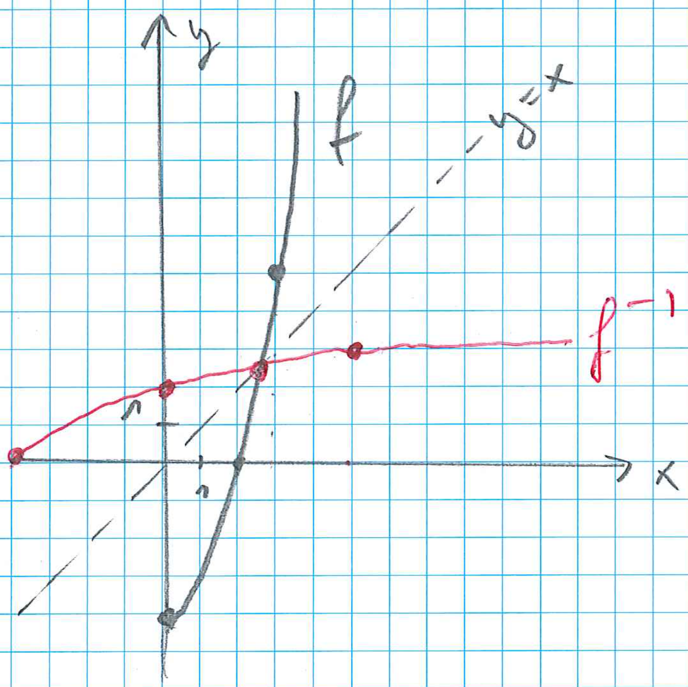
$\Leftrightarrow \frac{y+5}{2} = x$

càd $x \xrightarrow{f} y = 2x-5$, $\frac{y+5}{2} \xleftarrow{f^{-1}} y$

d'où $f^{-1}(y) = \frac{y+5}{2}$

ou, en renommant la variable : $f^{-1}(x) = \frac{x+5}{2}$

ex 9



f et f^{-1} sont symétriques par rapport à l'axe $y=x$