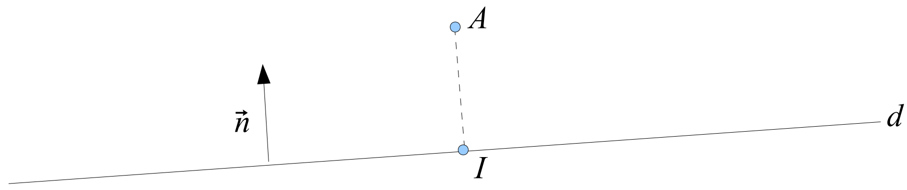
Théorème « Distance point-droite» (dans le plan)

Si *d* est une droite du plan d'équation (cartésienne) $ax+by+c=0$, $A(x_0;y_0)$ un point quelconque et δ la distance entre *A* et *d*, alors on a: $\delta=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Démonstration

Soit $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ un vecteur normal à *d* et $I(i_1;i_2)$ le projeté orthogonal de *A* sur *d*.

Représenter la situation:



On a: $\vec{AI}=\lambda\vec{n}$ pour un certain λ inconnu appartenant à $\mathbb{R}$, car [ARG1: …...............]

Nous allons déterminer la valeur de λ :

$$\vec{AI}=\lambda\vec{n}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}i_1-x_0\\i_2-y_0\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$, car [ARG2:............................]

$$\Leftrightarrow\begin{cases}i_1-x_0 &= \lambda\cdot a\\ i_2-y_0 &= \lambda\cdot b\end{cases}$$, car [ARG3:............................]

$$\Leftrightarrow\begin{cases}i_1 &= x_0+\lambda\cdot a\\ i_2 &= y_0+\lambda\cdot b\end{cases}$$, car [ARG4:............................]

Les coordonnées $(i_1;i_2)$ de *I* vérifient l'équation de *d*, car [ARG5: …...............]

donc:

$$a\,i_1+b\,i_2+c=0\Leftrightarrow a(x_0+\lambda\cdot a)+b(y_0+\lambda\cdot b)+c=0$$, car [ARG6:............................]

$$\Leftrightarrow a\,x_0+b\,y_0+c+\lambda(a^2+b^2)=0$$, car [ARG7:............................]

$$\Leftrightarrow\lambda=-\frac{a\,x_0+b\,y_0+c}{a^2+b^2}$$, car [ARG8:............................]

d'où:

$$\vec{AI}=\lambda\vec{n}$$, car [ARG9:............................]

$$=-\frac{a\,x_0+b\,y_0+c}{a^2+b^2}\vec{n}$$, car [ARG10:............................]

$$=-\frac{a\,x_0+b\,y_0+c}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$$, car [ARG11:............................]

Mais la distance δ entre *A* et *I* est égale à la longueur du vecteur $\vec{AI}$,

car [ARG12: …..]

On en déduit que:

$$\begin{aligned}\delta &= \left\| -\frac{a\,x_0+b\,y_0+c}{a^2+b^2}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right\| &&\text{, car [ARG13:.............................]}\\
&= \left| -\frac{a\,x_0+b\,y_0+c}{a^2+b^2}\right|\cdot\left\|\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right\| &&\text{, car [ARG14:.............................]}\\
&= \left|\frac{a\,x_0+b\,y_0+c}{a^2+b^2}\right|\cdot\sqrt{a^2+b^2} &&\text{, car [ARG15:.............................]}\\
&= \frac{|a\,x_0+b\,y_0+c|}{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2} &&\text{, car [ARG16:.............................]}\\
&= \frac{|a\,x_0+b\,y_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} &&\text{, car [ARG15:.............................]}\end{aligned}$$