

Ex 1

- (a) Donner la définition mathématique de la convergence de la suite
- $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}}$
- vers
- L
- :

$$\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ t.q. } n \geq N \Rightarrow |s_n - L| < \varepsilon$$

[1/2]

/3

- (b) Soit la suite définie par
- $s_n = \frac{2}{\sqrt{n}} + 1$
- . Compléter le terme manquant :

« s_n est appelé le *terme général* de la suite ».

/1

- (c) Utiliser la définition précédente pour montrer que
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = 1$
- .

Soit $\varepsilon > 0$ donné.

$$\text{on veut } |s_n - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{2}{\sqrt{n}} + 1 - 1 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{2}{\sqrt{n}} \right| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{2}{\varepsilon} < \sqrt{n} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{\varepsilon} \right)^2 < n$$

Il suffit donc de choisir $N = \left\lceil \frac{4}{\varepsilon^2} \right\rceil + 1$ (, car alors on a :

$$n \geq N \Rightarrow n \geq \left\lceil \frac{4}{\varepsilon^2} \right\rceil + 1 > \frac{4}{\varepsilon^2} \Leftrightarrow |s_n - 1| < \varepsilon$$

q.f.d

/5

- (d) A partir de quel terme la suite est-elle proche de 1 au millième près ?

$$\varepsilon = 10^{-3} : N = \left\lceil \frac{4}{(10^{-3})^2} \right\rceil + 1$$

$$= \left\lceil \frac{4}{10^{-6}} \right\rceil + 1$$

$$= \left\lceil 4 \cdot 10^6 \right\rceil + 1$$

$$= 4\,000\,000 + 1$$

$$= 4\,000\,001$$

/3

Collège de Saussure Epreuve de mathématiques de 3e année, niveau avancé	
Maître	Jean-Marie Delley
Date	21 octobre 2021
Durée	90 minutes
Documents et matériel autorisés	personnels : • table numérique non annotée (signets et surlignage autorisés) ; • calculatrice TI30, TI34 ou modèle équivalent (non graphique, non programmable).
Consignes	• répondre sur l'énoncé ; vous pouvez joindre si nécessaire une feuille en y ajoutant votre nom ; • la présentation doit être soignée, l'écriture lisible ; • toutes les réponses doivent être justifiées par un raisonnement ou un calcul.

Nom : Prénom : Groupe :

Répartition des points

Exercice 1 : 12 points

Exercice 2 : 8 points

Exercice 3 : 11 points

Exercice 4 : ~~17~~ points 6

Exercice 5 : ~~5~~ points 14

Exercice 6 : ~~8~~ points 15 Ex?

Notations : → / 2 points

Total : / 63 points

Français (facultatif) : → / 1 point

Total final : / 63 points

Note : / 6

~~Exercice 1 (environ 12 points)~~

Exercice 2 (environ 8 points)

Montrer par récurrence que $1+x+x^2+\dots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

• H.R. $1+x+x^2+\dots+x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

• à dem. $1+x+x^2+\dots+x^n+x^{n+1} \stackrel{?}{=} \frac{1-x^{n+2}}{1-x}$

dem: $1+x+x^2+\dots+x^n+x^{n+1} \stackrel{\text{H.R.}}{=} \frac{1-x^{n+1}}{1-x} + x^{n+1}$

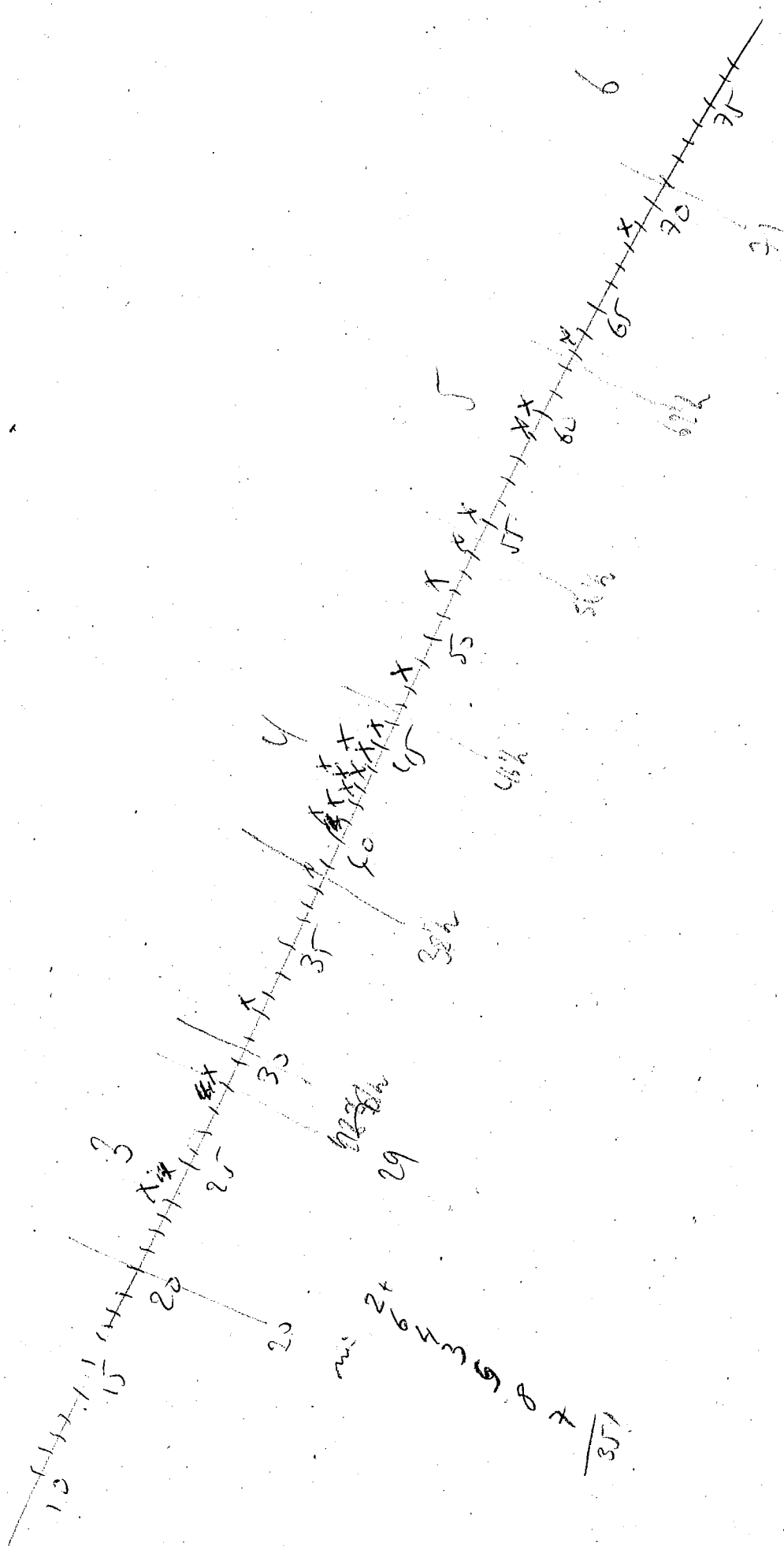
$$= \frac{1-x^{n+1} + (1-x)x^{n+1}}{1-x}$$

$$= \frac{1-\cancel{x^{n+1}} + \cancel{x^{n+1}} - x^{n+2}}{1-x}$$

$$= \frac{1-x^{n+2}}{1-x} \quad \text{c/q/d}$$

• c. n=0: $1 \stackrel{?}{=} \frac{1-x^1}{1-x}$ ✓

Méthode 1/6
Technique 1/2



Exercice 3 (environ 12 points)

- (a) Donner la définition mathématique de «
- n
- est un nombre premier» :

Soit $n \in \mathbb{N}$.

n est un nombre premier $\Leftrightarrow$ les seuls diviseurs (entiers naturels) de n sont 1 et n

12

- (b) On démontre ci-dessous qu'il existe une infinité de nombres premiers :

Pour chaque [...], compléter par ce qui manque.

Démonstration : [tot : 10]

Supposons qu'il existe un nombre n de nombres premiers qu'on nomme $p_1, p_2, \dots, [\dots p_n \dots]$ Considérons le nombre $p = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot [\dots p_n \dots] + 1$ Ce nombre n'est pas divisible par p_1 , car sinon on aurait : $p = k \cdot p_1$, avec $k \in [\dots \mathbb{N}^* \dots]$ ($\in \mathbb{N}$),et donc $k \cdot p_1 = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot [\dots p_n \dots] + 1 \Rightarrow p_1 \cdot ([\dots k - p_2 \dots p_n \dots]) = [\dots 1 \dots]$ ce qui impliquerait que p_1 soit un diviseur de [...],Ceci est impossible, car [... $p_1 \neq 1$ et 1 n'a pas d'autres diviseurs que 1] 1On en déduit que p_1 ne divise pas [... p ...].Le même raisonnement montre que $p_2, p_3, \dots, [\dots p_n \dots]$ ne divisent non plus pas [... p ...].Donc [... p ...] est un autre nombre [... premier ...] qui n'appartient pas à la liste initiale $p_1, p_2, \dots, [\dots p_n \dots]$.Ceci est impossible, car [... p ...] équivaut tous les dans $\{p_1, \dots, p_n\}$ par hypothèse.On en conclut qu'il existe un nombre [... n fini ...] de nombres premiers.

cqfd

- (c) Compléter le terme manquant :

«Une telle démonstration s'appelle une démonstration par [... l'absurde ...]» 1

Exercice 4 (environ 6 points)

Calculer la limite suivante en justifiant toutes les étapes au dessus des égalités en utilisant les théorèmes connus rappelés plus bas (dans une rédaction simplifiée) :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{\frac{-64}{x+1}} \stackrel{(L1)}{=} \sqrt[3]{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-64}{x+1}} \stackrel{(Pr1)}{=} \sqrt[3]{\frac{\lim_{x \rightarrow 0} -64}{\lim_{x \rightarrow 0} (x+1)}} \stackrel{(L1)}{=} \sqrt[3]{\frac{-64}{\lim_{x \rightarrow 0} (x+1)}} \stackrel{(L1)}{=} \sqrt[3]{\frac{-64}{\lim_{x \rightarrow 0} x + \lim_{x \rightarrow 0} 1}} \stackrel{(L2)}{=} \sqrt[3]{\frac{-64}{0 + \lim_{x \rightarrow 0} 1}} \stackrel{(L1)}{=} \sqrt[3]{\frac{-64}{0+1}} = \sqrt[3]{-64} = -4$$

/6

Théorème : [Limites de fonctions élémentaires]

[L1] $\lim_{x \rightarrow a} k = k, \forall a \in \mathbb{R}$

[L2] $\lim_{x \rightarrow a} x = a, \forall a \in \mathbb{R}$

[L3] $\lim_{x \rightarrow a} \sin(x) = \sin(a)$ et $\lim_{x \rightarrow a} \cos(x) = \cos(a) \quad \forall a \in \mathbb{R}$

[L4] $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}, \forall a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{a}, \forall a \in \mathbb{R}$

[L5] $\lim_{x \rightarrow a} \log_b(x) = \log_b(a), \forall a \in \mathbb{R}_+^*$ et $\lim_{x \rightarrow a} \exp_b(x) = \exp_b(a), \forall a \in \mathbb{R}$

Théorème : [Propriétés des limites]

[PrL1] Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existent, alors $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

[PrL2] Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existent, alors $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

[PrL3] Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existent, alors $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$

[PrL4] Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existent et $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$, alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$

[PrL5] Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{t \rightarrow b} g(t) = g(b)$ existent, alors $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow a} f(x)) = g(b)$

[PrL6] Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existe et si $k \in \mathbb{R}$ est une constante, alors on a $\lim_{x \rightarrow a} [k \cdot f(x)] = k \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)$

[PrL7] Si f est une fonction polynomiale alors, pour $a \in \mathbb{R}$, on a $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

[PrL8] Si f et g sont telles que $f(x) < g(x)$ pour $x \in I$, et si $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ existent,

alors on a: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ pour $x \in I$

Exercice 5 (environ 17 points)

(a) On considère la fonction f définie par $f(x) = -\frac{4(x^2+3x)}{x^2+2x-3}$.

ii) Déterminer toutes les asymptotes de f .

$$f(x) = \frac{-4x^2 - 12x}{x^2 + 2x - 3} = \frac{-4x(x+3)}{(x+3)(x-1)} = \frac{-4x}{x-1} \quad \begin{array}{l} \uparrow \\ \text{si } x \neq -3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{forme simplifiée} \end{array}$$

forme dev. forme fact. forme simplifiée

en $x=1$: $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-4x}{x-1} = \frac{-4}{0^+} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-4x}{x-1} = \frac{-4}{0^-} = +\infty$

$x=1$ est vert de f

ex $x=$

Exercice 5 (environ 8 points)

On considère la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} \frac{4-x}{x-4}, & \text{si } x < 4 \\ -32 \frac{\sqrt{x-2}}{x^2-16}, & \text{si } x > 4 \\ -1, & \text{si } x = 4 \end{cases}$

Est-elle continue en $x = 4$?

(on ne demande pas de justification autre que les calculs détaillés).

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{3} \quad \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{4-x}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-(x-4)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4^-} -1 = -1 \\
 \frac{1}{3} \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} -32 \left(\frac{\sqrt{x-2}}{(x-4)(x+4)} \cdot \frac{(\sqrt{x+2})}{(\sqrt{x+2})} \right) \\
 &= \lim_{x \rightarrow 4^+} -32 \frac{\cancel{x-4}}{(\cancel{x-4})(x+4)(\sqrt{x+2})} = \frac{-32}{8 \cdot 4} = -1
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} \text{donc} \\ \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = -1 \end{array} \right\}$$

$\frac{1}{4} \quad f(4) = -1$

donc f est continue en $x = 4$ /1

Exercice 5 (environ 14 points)

On considère la fonction f définie par $f(x) = -\frac{4(x^2+3x)}{x^2+2x-3}$.

- (a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -3} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{-4x(x+3)}{(x+3)(x-1)} = \frac{-4 \cdot 12}{-4} = -3 \quad /3$$

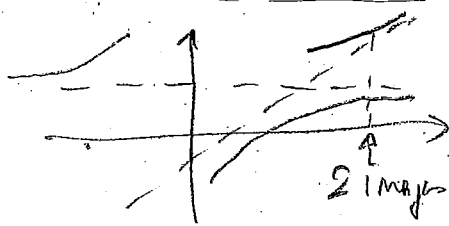
- (b) Déterminer les asymptotes verticale et horizontale de f

• $x=1$: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-4x}{x-1} = \frac{-4}{0^+} = -\infty$ donc $x=1$ est
 $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-4x}{x-1} = \frac{-4}{0^-} = +\infty$ as. vert. de f /3

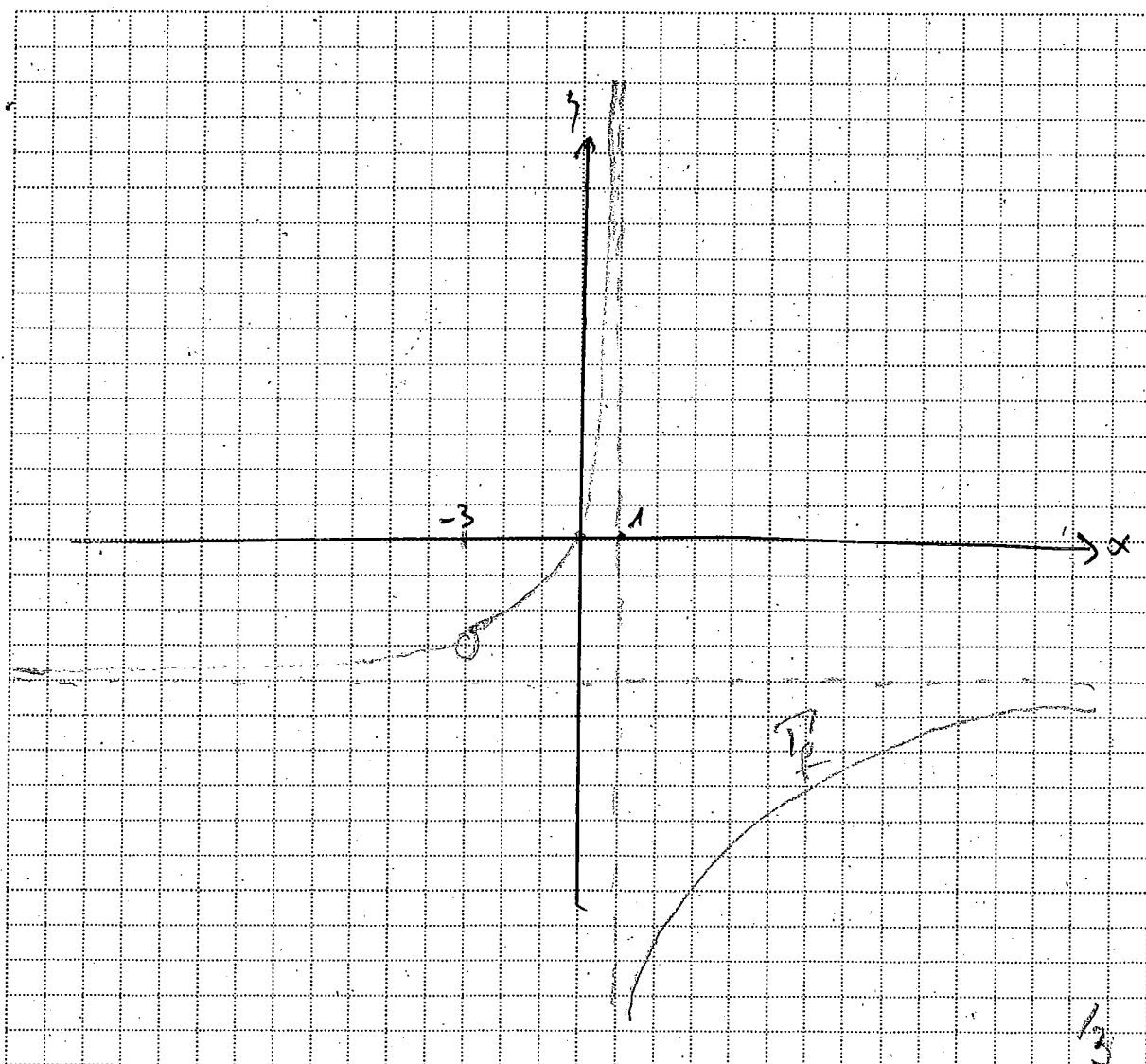
• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x^2-12x}{x^2+2x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4-12/x}{1+2/x-3/x^2} = -4$
 idem à $-\infty$
 donc $y = -4$ as. horiz. de f à $\pm \infty$ /3

- (c) Expliquer pourquoi on peut être certain que f n'a pas d'asymptote oblique.

comme f admet déjà une as. horiz à $\pm \infty$, si f a pas d'as. oblique,
 sinon, f ne serait pas une fonction ! 1/2



- (d) Proposer ci-dessous une représentation graphique de f cohérente avec les résultats précédents (on ne demande pas d'autres calculs) :



Exercice 7 (environ 15 points)

(a) On considère la fonction g définie par $g(x) = x - \sqrt{x^2 - 1}$.

(b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{x^2 - 1}) = -\infty - \sqrt{(-\infty)^2 - 1} = -\infty - \sqrt{+\infty} \\ &= (-\infty) - (\infty) = -\infty \end{aligned} \quad 1/3$$

(c) Montrer que $y=0$ est une asymptote horizontale de g à $+\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - 1}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 - 1})(x + \sqrt{x^2 - 1})}{(x + \sqrt{x^2 - 1})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - (x^2 - 1)}{x + \sqrt{x^2 - 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{+\infty + (+\infty)} = \frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned} \quad 1/3$$

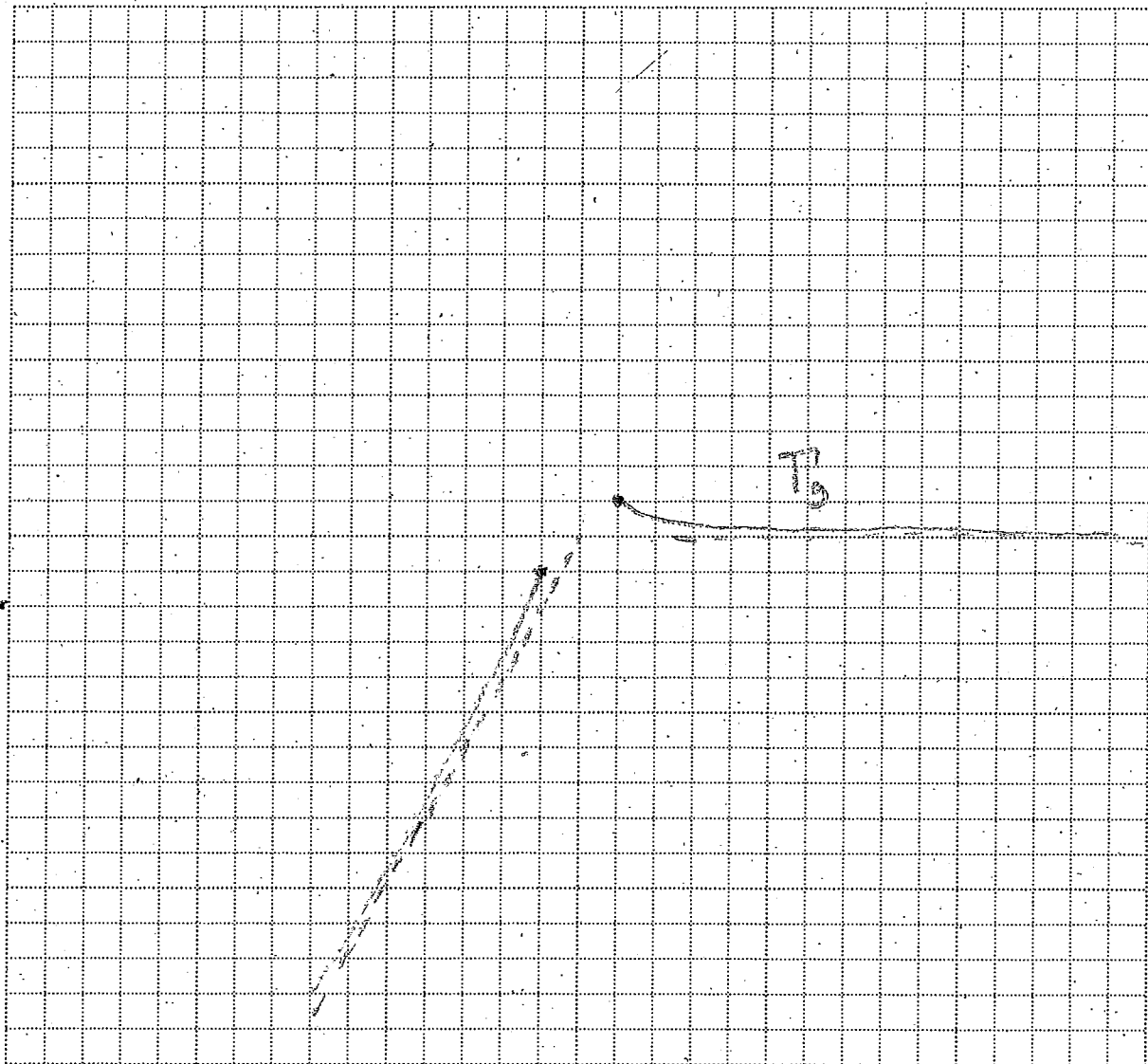
(c) Déterminer l'asymptote oblique de g à $-\infty$.

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2(1 - 1/x^2)}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - |x|\sqrt{1 - 1/x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - (-x)\sqrt{1 - 1/x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(1 + \sqrt{1 - 1/x^2})}{x} \\ &= 1 + \sqrt{1 - 0} = 2 \end{aligned} \quad 1/4$$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - \sqrt{x^2 - 1} - 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x - \sqrt{x^2 - 1}) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x^2 + 1}{-x + (-x)\sqrt{1 - 1/x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x(1 + \sqrt{1 - 1/x^2})} = \frac{1}{(-\infty) \cdot 2} = 0 \quad 1/3 \end{aligned}$$

donc $y = 2x$ est as. obl. de f

- (d) Proposer une représentation graphique de g cohérente avec les résultats précédents (on ne demande pas d'autres calculs) :



/3

