ex1: [16]

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2(x+h)-3(x+h)^2-[2x-3x^2]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{2x}+2h-3(x^2+2xh+h^2)-\cancel{2x}+3x^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2h-\cancel{3x^2}+6xh-3h^2+\cancel{3x^2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(2-6x-3h)}{\cancel{h}}$$

$$= 2-6x$$

ex2: [/14]

a) $$\lim_{x\to 1} \frac{4x^3-4}{x-x^2} \quad \left[\text{type } \text{"}\tfrac{0}{0}\text{"} \ \tfrac{\text{pol}}{\text{pol}} \Rightarrow \text{fact}\right]$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{4(x^3-1)}{x(1-x)} = \lim_{x\to 1} \frac{4(x-1)(x^2+x+1)}{x(1-x)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{4\cancel{(x-1)}(x^2+x+1)}{-x\cancel{(x-1)}}$$

$$= \frac{4\cdot 3}{-1} = -12$$

(5)

b) $$\lim_{x\to 1} \frac{2x-2}{\sqrt{9x}-3} \quad \left[\text{type } \text{"}\tfrac{0}{0}\text{"} \ \sqrt{\ } \Rightarrow \text{conjugué}\right]$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{2(x-1)(\sqrt{9x}+3)}{(\sqrt{9x}-3)(\sqrt{9x}+3)} = \lim_{x\to 1} \frac{2(x-1)(\sqrt{9x}+3)}{9x-9}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{2(x-1)(\sqrt{9x}+3)}{9(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{2\cancel{(x-1)}(\sqrt{9x}+3)}{9\cancel{(x-1)}}$$

$$= \frac{2\cdot 6}{9} = \frac{4}{3}$$

(5)

c) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 - 2x + 7}{x^3 + 3x}$ [type $\frac{\infty - \infty}{\infty}$ pol $\Rightarrow$ m.se en év. forcée]

$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^3}(2 - 2/x + 7/x^2)}{\cancel{x^3}(1 + 3/x)}$ (4)

$= \frac{2}{1} = 2$

ex 3 : $f(x) = \frac{5}{x+1}$

c) $f'(x) = 5 \cdot \left(\frac{1}{x+1}\right)' = 5\left(-\frac{(x+1)'}{(x+1)^2}\right) = -\frac{5}{(x+1)^2}$

$f'(3) = -\frac{5}{(3+1)^2} = -\frac{5}{16}$

Eq de t : $y = -\frac{5}{16}x + b$ (3)

$(3; f(3)) \in t \Leftrightarrow (3; \frac{5}{4}) \in t$

$\Leftrightarrow \frac{5}{4} = -\frac{5}{16} \cdot 3 + b$

$\Leftrightarrow b = \frac{5}{4} + \frac{15}{16} = \frac{20 + 15}{16} = \frac{35}{16}$

$\left[y = -\frac{5}{16}x + \frac{35}{16} \right]$ (3)

d) $f'(x) = -5 \Leftrightarrow -\frac{5}{(x+1)^2} = -5$

$\Leftrightarrow -5 = -5(x+1)^2$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 = 1$

$\Leftrightarrow x + 1 = \pm 1$

$\Leftrightarrow x = -1 \pm 1$ (3)

$x = 0$ ou $x = -2$

En $(0; f(0))$: $y = -5x + b$
$f(0) = -5 \cdot 0 + b$
$5 = b$
$[y = -5x + 5]$ (2)

En $(-2; f(-2))$: $y = -5x + b$
$f(-2) = -5 \cdot (-2) + b$
$b = -5 - 10 = -15$
(2) $[y = -5x - 15]$

ex4:

[/ 13]

a) $\left(\frac{3x-4x^2}{x^3}\right)' = \left(\frac{x(3-4x)}{x^3}\right)' = \left(\frac{3-4x}{x^2}\right)'$

$= \frac{(-4)\cdot x^2 - (3-4x)\cdot 2x}{x^4}$

$= \frac{-4x^2 - 6x + 8x^2}{x^4}$

$= \frac{4x^2 - 6x}{x^4} = \frac{2x(2x-3)}{x^4} = \frac{2(2x-3)}{x^3}$ 4

b) $\left(\sqrt{1-x^2}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot (1-x^2)'$

$= \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$ 3

c) $\left[(x^2-4)^6 \cdot x^8\right]' = 6(x^4-4)^5 \cdot (x^4-4)' \cdot x^8 + (x^4-4)^6 \cdot 8x^7$

$= 6(x^4-4)^5 \cdot 4x^3 \cdot x^8 + (x^4-4)^6 \cdot 8x^7$

$= (x^4-4)^5 \cdot 8 \cdot x^7 \left[3x^4 + x^4 - 4\right]$

$= (x^4-4)^5 \cdot 8x^7 \cdot \left[4x^4 - 4\right]$

$= (x^2+2)^5 (x^2-2)^5\, 8x^7\, 4(x^4-1)$

$= (x^2+2)^5 (x^2-2)^5\, 8x^7\, 4(x^2+1)(x-1)(x+1)$

6

ex5 : [/9]

a) $$\frac{x^3 - x^2 + 2x - 2}{x^2+2} = \frac{x^2(x-1) + 2(x-1)}{x^2+2}$$

$$= \frac{(x-1)(\cancel{x^2+2})}{\cancel{x^2+2}}$$

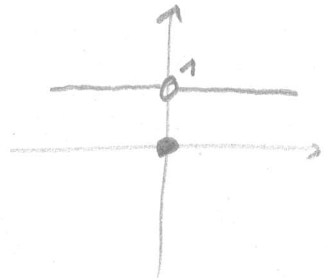
on peut simplifier pour tout $x \in \mathbb{R}$, car $x^2+2 \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$$= x-1$$

donc c'est vrai (1+4)

b) Faux

C-ex :



$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$

mais $f(0) = 0$

donc f n'est pas continue en 0

(1+3)

ex6 : [/20]

a) HYP Si f est dérivable en x

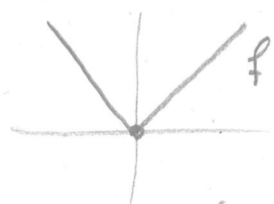
CONCL alors f est continue en x (3)

b) 22 : 2 → 11 pts

c) Si f est cont en x, alors f est dér. en x (3)

d) Fausse

C-ex : $f(x) = |x|$



(3)

en 0, il n'y a pas de tg, donc pas de pente, donc pas de dérivée ; si on approche par la gauche, on a une pente de -1, et par la droite une pente de 1 !

ex7 : [/10]

Exercice 6(environ points)

On considère le théorème sur la relation entre « dérivabilité en x » et « continuité en x »

a) Enoncer précisément ce théorème en identifiant hypothèses et conclusions

b) On donne ci-dessous une démonstration de ce théorème; donner les arguments qui manquent [directement sur l'énoncé] et compléter lorsque c'est nécessaire :

Démonstration :

On commence par écrire $f(x+h)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\cdot h+[\ldots f(x)\ldots]$ (1)

Cette égalité est vraie pour $[\ldots h\ldots]\neq 0$ (1)

On a alors :

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = \lim_{h\to 0}\left(\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]\cdot h+f(x)\right)$$ (1)

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]\cdot \lim_{h\to 0} h+\lim_{h\to 0}[f(x)]$$ (2)

car [ARG 3 : thm sur les limites ok si les 3 nouvelles limites existent ce qu'on va voir plus bas] (2)

Or on a :

- $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=[f'(x)]$, car [ARG 4 : c'est la déf de $f'(x)$ (1) et f est dérivable en x par hypothèse] (2)
- $\lim_{h\to 0} h=[\ldots 0\ldots]$, car [ARG 5 : pas d'indétermination (1) (fct polyn de degré 1 continue) (2)]
- $\lim_{h\to 0} f(x)=[f(x)]$, car [ARG 6 : f(x) est constante par (1) rapport à h (2)]

On en déduit donc que :

$$\lim_{h\to 0} f(x+h) = [f'(x)]\cdot[\ldots 0\ldots]+[f(x)]$$ (1)

$$= [f(x)]$$ (1)

Ceci signifie que [... f ...] est [... continue ...] en [... x ...] (2)

car [ARG 8 : c'est la déf de la cont en x] (2)

c) Enoncer la réciproque de ce théorème.

d) Cette réciproque est-elle vraie? Justifier.

22 pts : 2 → [11]

[10]

Exercice 7 *(environ points)*

On donne ci-dessous une représentation graphique d'une fonction réelle f .

Tracer soigneusement une représentation graphique de la fonction dérivée f' de f dans le repère supplémentaire :