Ma3N Corrigé travail n°2 tot 100 pts not /3 ½ /3

/103

ex 1: [/27]

(a) $\left(\frac{2}{x^2-1}\right)' = 2\left(\frac{1}{x^2-1}\right)' = 2\cdot\left[\frac{-(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}\right] = 2\left(\frac{-2x}{(x^2-1)^2}\right)$

$= -\frac{4x}{(x^2-1)^2}$ (3)

(b) $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2}{(x+h)^2-1} - \frac{2}{x^2-1}}{h}$

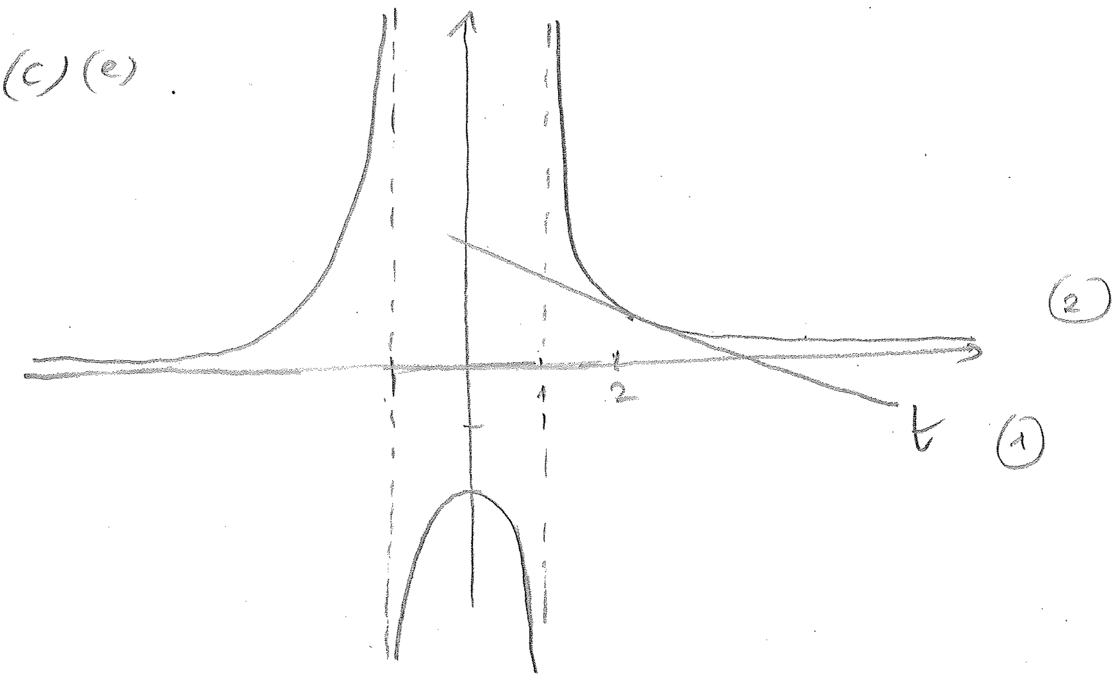
$= \lim_{h\to 0} \frac{2(x^2-1) - 2[(x+h)^2-1]}{[(x+h)^2-1]\cdot(x^2-1)} \cdot \frac{1}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{2x^2}\cancel{-2}-\cancel{2x^2}-4xh-2h^2\cancel{+2}}{[(x+h)^2-1]\cdot(x^2-1)\cdot h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{-2\cancel{h}(2x+h)}{[(x+h)^2-1](x^2-1)\cdot\cancel{h}}$

$= \frac{-2(2x+0)}{[(x+0)^2-1][x^2-1]} = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$ (6)

(c) (e)



d) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{2}{x^2-1}$ type "$\frac{1}{0}$"

$\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{0^+\cdot 2} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{2}{(x-1)(x+1)} = \frac{2}{0^-\cdot 2} = -\infty$ } donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \nexists$ (3)

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{2}{x^2-1} = \frac{2}{(-\infty)^2-1} = \frac{2}{\infty - 1} = \frac{2}{\infty} = 0$ (2)

e) éq. de la tangente en $(a; f(a))$:

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

$a=2$: $f'(2) = \frac{-4\cdot 2}{(2^2-1)^2} = \frac{-8}{9}$

$f(2) = \frac{2}{2^2-1} = \frac{2}{3}$

d'où $y = -\frac{8}{9}(x-2) + \frac{2}{3} = -\frac{8}{9}x + \frac{16}{9} + \frac{2}{3} = -\frac{8}{9}x + \frac{22}{9}$

càd $\boxed{y = -\frac{8}{9}x + \frac{22}{9}}$ (6)

f) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{4x}{(x^2-1)^2} = 0 \Leftrightarrow -4x = 0$ (si $x \neq \pm 1$)

$\Leftrightarrow x = 0$

donc $y = 0x + b$

Comme $(0;-2) \in t$, on a : $-2 = 0x + b$

$b = -2$

donc $\boxed{y = -2}$ (4)

Ex 2 :

[/8]

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4-3(x+h)} - \sqrt{4-3x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4-3x-3h} - \sqrt{4-3x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{4-3x-3h} + \sqrt{4-3x}}{\sqrt{4-3x-3h} + \sqrt{4-3x}}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[4-\cancel{3x}-3h] - [4-3x]}{[\sqrt{4-3x-3h} + \sqrt{4-3x}]\cdot h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-3\cancel{h}}{[\sqrt{4-3x-3h} + \sqrt{4-3x}]\cdot \cancel{h}}$$

$$= \frac{-3}{\sqrt{4-3x-0} + \sqrt{4-3x}} = -\frac{3}{2\sqrt{4-3x}} \qquad (8)$$

Ex 3:

[/18]

a) $f'(x) = (\sqrt{2}\cdot x^4)' = \sqrt{2}\,(x^4)' = \sqrt{2}\cdot 4x^3$ (3)

b) $f'(x) = \left(\sqrt{2x^6-x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{2x^6-x}} \cdot (2x^6-x)'$

$$= \frac{2\cdot(x^6)'-(x)'}{2\sqrt{2x^6-x}} = \frac{2\cdot 6x^5-1}{2\sqrt{2x^6-x}} = \frac{12x^5-1}{2\sqrt{2x^6-x}} \qquad (4)$$

c) $f'(x) = \left(\frac{x-x^2}{x^2-1}\right)' = \frac{(x-x^2)'\cdot(x^2-1) - (x-x^2)\cdot(x^2-1)'}{(x^2-1)^2}$

$$= \frac{(1-2x)(x^2-1) - (x-x^2)\cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{(1-2x)(x-1)(x+1) - x(1-x)\cdot 2x}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{(1-2x)(x-1)(x+1) + 2x^2(x-1)}{(x^2-1)^2} = \frac{(x-1)[(1-2x)(x+1) + 2x^2]}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{(x-1)\cdot(x+1-\cancel{2x^2}-2x+\cancel{2x^2})}{(x^2-1)^2} = \frac{(x-1)(1-x)}{(x^2-1)^2} = -\frac{(x-1)^2}{(x^2-1)^2}$$

$$= -\frac{\cancel{(x-1)^2}}{\cancel{(x-1)^2}(x+1)^2} \underset{(\text{si } x\neq 1)}{=} -\frac{1}{(x+1)^2} \qquad (6)$$

ou $\left(\frac{x-x^2}{x^2-1}\right)' = \left(\frac{x(1-x)}{(x-1)(x+1)}\right)' = \left(-\frac{x\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)}\right)'$

si $x \neq 1$ $\Rightarrow$ $= \left(-\frac{x}{x+1}\right)' = -\left(\frac{x}{x+1}\right)' = -\left(\frac{1\cdot(x+1)-x(1)}{(x+1)^2}\right)$

$= -\left(\frac{x+1-x}{(x+1)^2}\right) = -\frac{1}{(x+1)^2}$

d) $f'(x) = \left(x^{12}(x^3-1)^9\right)' = (x^{12})'(x^3-1)^9 + x^{12}\left((x^3-1)^9\right)'$

$= 12x^{11}\cdot(x^3-1)^9 + x^{12}\cdot 9(x^3-1)^8\cdot(x^3-1)'$

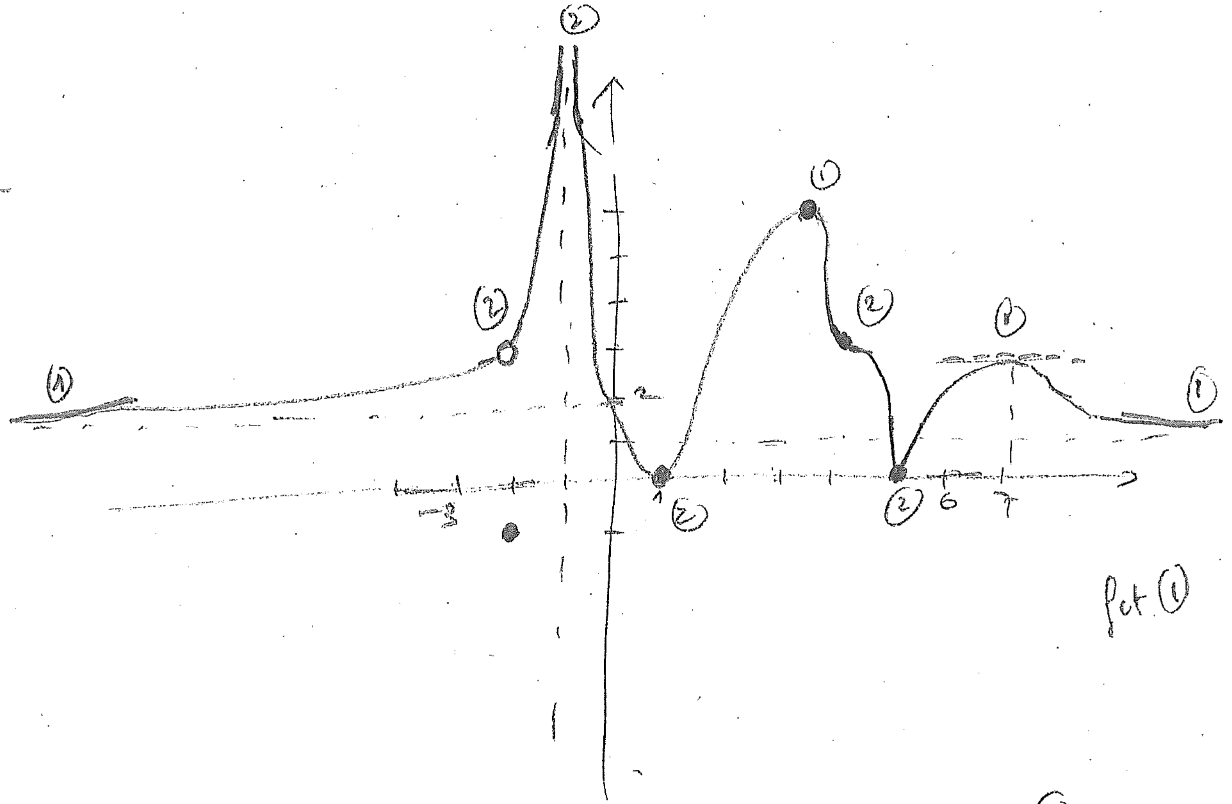
$= 12x^{11}(x^3-1)^9 + x^{12}\cdot 9(x^3-1)^8\cdot 3x^2$

$= 3x^{11}(x^3-1)^8\left[4(x^3-1)+9x^3\right] = 3x^{11}(x^3-1)^8(13x^3-4)$

5

Ex 4

[/15]



fct 1

$Z_f = \{1;5\}$ 2

$f(3) = 6$ 1

$\lim\limits_{x\to -1} f(x) = +\infty$ 2

$f'(7) = 0$ 1

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = 2$ 1

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 1$ 1

$\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 3$ et $f(-2) = -1$ 2

$\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 3$ / f cont. en 4 2

f pas dériv. en $x=5$ / cont. en $x=5$ 2

f est une fonction 1

(17) Ex 5

(a) Thm: HYP

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in I$, alors l'équation de la tangente à f en $(a; f(a))$ est CONCL

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

4

[/13]

Exercice 5 (environ ~~2~~ 4 points)

On considère le théorème sur l'équation de la tangente à une fonction donnée en un point.

(a) Enoncer précisément ce théorème en identifiant clairement les hypothèses et les conclusions.

(b) On donne ci-dessous une démonstration de ce théorème; donner les arguments qui manquent et compléter les [..........] lorsque c'est nécessaire (directement sur l'énoncé):

Démonstration :

L'équation de la tangente t est de la forme y=m[......x.........]+n,

car[ARG 1: c'est l'équation générale d'une droite] (2)

La fonction est dérivable en a,

car[ARG 2: par hypothèse] (2)

donc $f'(a)$ existe

Or, [f'(a)] s'interprète géométriquement comme la [pente de la tangente t] à f en [(a;f(a))]

D'où m=[f'(a)]

car[ARG 3: m est la pente de la droite t] (1)

On sait donc maintenant que t est de la forme y=[f'(a) x] + [n]

Reste à déterminer [..... n .....]:

On sait que le point [(a ; f(a))] appartient à la représentation graphique de t, donc ses coordonnées vérifient l'équation de t ; on a donc:

[f(a)]= $f'(a)$·[a]+[n]

d'où: n= [f(a) − f'(a)·a]

car[ARG 4: on soustrait f'(a)·a à l'équation] (1)

Finalement, l'équation de t est bien y=[f'(a) x + f(a) − f'(a) a]

= f'(a)(x−a) + f(a)

[...] : 0,5 chacun → 7,5