MA3N Corrigé travail 30' n° 4

Ex 1 $\quad f(x) = \dfrac{2x^2+9x+6}{x^2+3x+2}$

[/31]

• D_f : pb si $x^2+3x+2=0$
$(x+2)(x+1)=0$
$x=-2$ ou $x=-1$ $\Rightarrow D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2;-1\}$ (3)

• zéros : $2x^2+9x+6=0$

$\Delta = b^2-4ac = 81-4\cdot2\cdot6 = 81-48 = 33$

$x_{1,2} = \dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-9\pm\sqrt{33}}{4}$ $\nearrow x_1 \simeq -0{,}81$ $\searrow x_2 \simeq -3{,}69$ (3)

$f(0) = \frac{6}{2} = 3$ (1)

• as. vert : candidats $x=-2$ et $x=-1$
tous deux du type $\frac{1}{0}$, donc as. vert dans les 2 cas !

$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = \dfrac{8-18+6}{0^-\cdot(-1)} = \dfrac{-4}{0^+} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = \dfrac{-4}{0^+(-1)} = \dfrac{-4}{0^-} = +\infty$ } donc $x=-2$ as. vert de f (3)

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = \dfrac{2-9+6}{1\cdot0^-} = \dfrac{-1}{0^-} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \dfrac{-1}{1\cdot0^+} = -\infty$ } donc $x=-1$ as. vert de f (3)

• as obl / horiz : deg(num) = deg(dénom), donc as. horiz

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{2x^2+9x+6}{x^2+3x+2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{\cancel{x^2}(2+9/x+6/x^2)}{\cancel{x^2}(1+3/x+2/x^2)} = \dfrac{2}{1} = 2$ (3)

donc $y=2$ as. horiz. de f à $\pm\infty$

• $f'(x) = \dfrac{(4x+9)(x^2+3x+2)-(2x^2+9x+6)(2x+3)}{(x^2+3x+2)^2}$

$= \dfrac{\cancel{4x^3}+\cancel{9x^2}+12x^2+\cancel{27x}+8x+\cancel{18}-\cancel{4x^3}-6x^2-\cancel{18x^2}-\underline{27x}-12x-\cancel{18}}{[(x+2)(x+1)]^2}$

$= \dfrac{-3x^2-4x}{(x+2)^2(x+1)^2}$

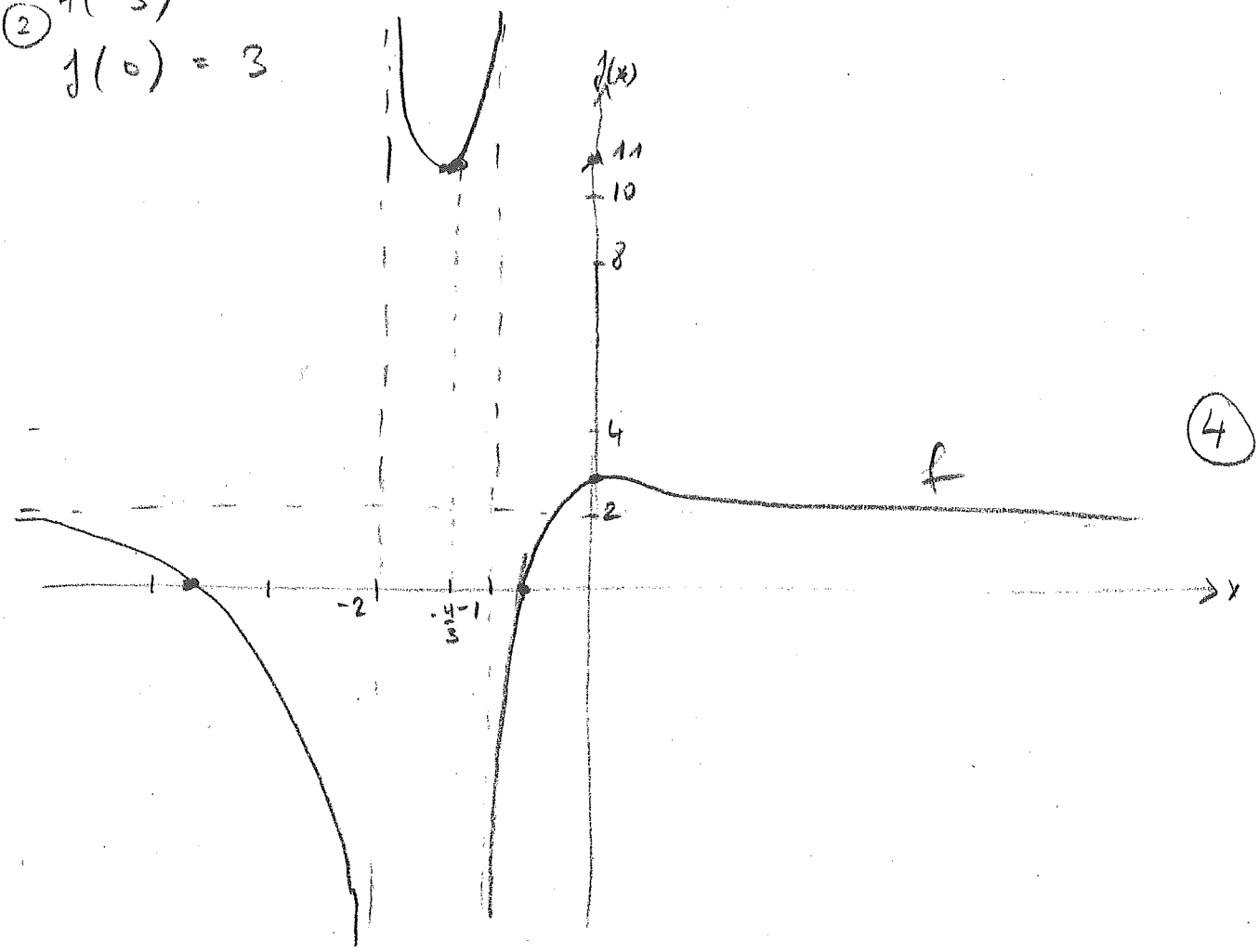
$= \dfrac{-x(3x+4)}{(x+2)^2(x+1)^2}$ (4)

x		-2		$-\frac{4}{3}$		-1		0	
$-x$	+	+	+	+	+	+	+	0	−
$3x+4$	−	−	−	0	+	+	+	+	+
$(x+2)^2$	+	0	+	+	+	+	+	+	+
$(x+1)^2$	+	+	+	+	+	0	+	+	+
$f'(x)$	−	//	−	0	+	//	+	0	−
$f(x)$	↘	//	↘	min	↗	//	↗	max	↘

5

2 $f\left(-\frac{4}{3}\right) = \text{"}\ldots\text{"} = 11$

$f(0) = 3$



4

Ex 2

[/7]

$$\begin{array}{r|l} 3x^4 - x^3 + 2 & x^3 + 5 \\ \hline -\ 3x^4 + 15x & 3x - 1 \\ \hline -x^3 - 15x + 2 & \\ -\ -x^3 - 5 & \\ \hline -15x + 7 & \end{array}$$

(3)

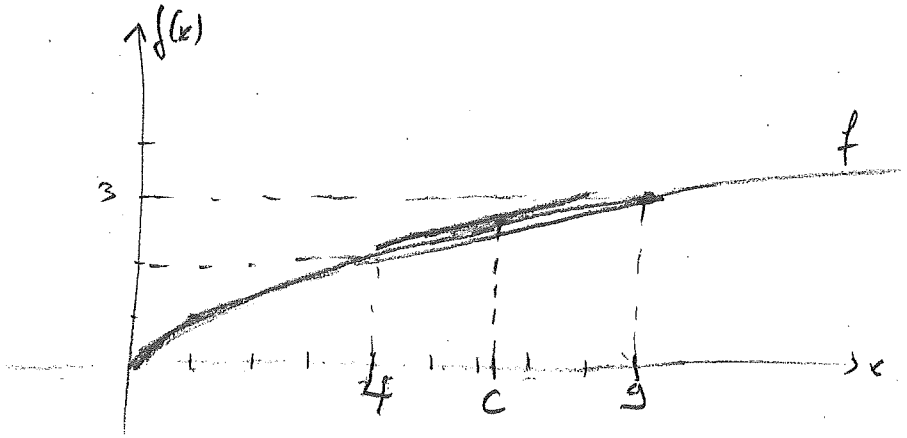
donc $\dfrac{3x^4 - x^3 + 2}{x^3 + 5} = 3x - 1 + \dfrac{-15x + 7}{x^3 + 5}$

d'où $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(3x - 1 + \underbrace{\dfrac{-15x+7}{x^3+5}}_{\to 0} \right)$ (3)

ce qui montre que $y = 3x - 1$ est as. oblique de f à $\pm\infty$ (1)

Ex 3

[/9]



Comme f est dér. sur $]4;9[$ et cont. sur $[4;9]$, il existe par thm AF un $c \in]4;9[$ tq $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = \dfrac{f(9) - f(4)}{9 - 4}$

$= \dfrac{\sqrt{9} - \sqrt{4}}{5} = \dfrac{3 - 2}{5} = \dfrac{1}{5}$ (3)

Or $f'(x) = (\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ (1)

donc on cherche un c tel que $\dfrac{1}{2\sqrt{c}} = \dfrac{1}{5} \Leftrightarrow 2\sqrt{c} = 5$

$\Leftrightarrow \sqrt{c} = 2{,}5$

$\Leftrightarrow c = 6{,}25$ (2)

Int. graphique :

la tg à f en $(6{,}25 ; 2{,}5)$ est parallèle à la sécante passant par $(4;2)$ et $(9;3)$ (3)

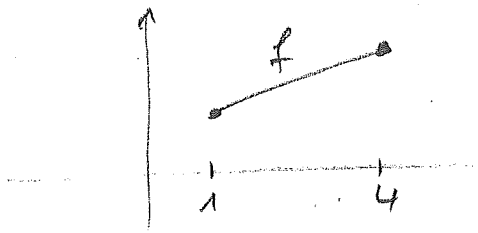
Ex 4

/12

a) Faux

C-Ex :

(1+3)



f dér. sur $]1;4[$
cont sur $[1;4]$
et pourtant $\nexists c \in]1;4[$
tel que $f'(c)=0$

b) Vrai
car les hyp. du thm de Rolle sont $\begin{cases} f \text{ dér sur }]a;b[\\ f \text{ cont sur } [a;b] \\ f(a)=f(b) \end{cases}$

(1+3)

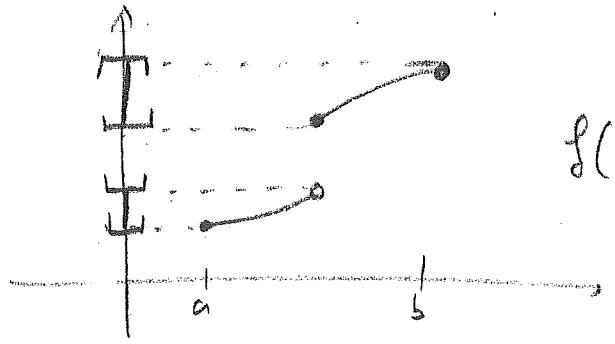
et celles des AF $\begin{cases} f \text{ dér sur }]a;b[\\ f \text{ cont sur } [a;b] \end{cases}$

donc si celles de Rolle sont vérifiées, celle des AF aussi,
et donc la conclusion valable

c) Faux

C-ex

(1+3)



$f([a;b])$ n'est pas de la forme $[m;M]$

Ex 5

[19] a) Si $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ est dér. sur $]a;b[$ et cont sur $[a;b]$, alors on a :

- si $f'(x) > 0 \ \forall x \in]a;b[$, alors f est croissante sur $[a;b]$
- si $f'(x) < 0$ - - - - - - - - - - - - - décroissante - - - -
- si $f'(x) = 0$ - - - - - - - - - - - - - constante - - - -

3

b) ARG's : 8 pts

..... : 5 pts

c) 3

Exercice 5 (*environ 6 points)*

(a) Enoncer complètement le corollaire du théorème des accroissement finis.

(b) On donne ci-dessous une démonstration de ce théorème.
Donner précisément le ou les arguments manquants [ARG 1] à [ARG 8] et remplir les [.....] par le ou les arguments manquants:

Démonstration pour le cas où $f'(x)<0$ sur $]a;b[$:

Soit x et $y \in [a;b]$, avec $x<y$.

On a :

f est dérivable sur ...$]x;y[$..., car [ARG 1: ....par hyp., f dér. sur]a;b[donc sur]x;y[...]

f est ..continue..... sur [x;y], car [ARG 2: .....h.....".....".....cont.....".....".....] " " "

Donc on peut appliquer le théorème des accroissements finis à ...f..... sur l'intervalle [x;y],

car [ARG 3: .....les hyp. sont vérifiées.....]

On a alors : il existe un $c \in]x;y[$ tel que $f'(c)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$

car [ARG 4:.....conclusion du thm AF.....]

Or, on sait que :

- $y-x$ ....>..... 0, car [ARG 5:.....y > x.....]
- $f'(c)$.....<..... 0 , car [ARG 6:....par hyp.....]

donc $f(y)-f(x)$ ...<... 0 , car [ARG 7:....règle des signes.....]

c'est-à-dire $f(y)$ ...<... $f(x)$, pour tout choix de x et y avec x < y.

C'est ce qu'il fallait démontrer, car [ARG 8:...déf. de la décroissance.....]

(c) Indiquer en quoi ce théorème est utile.