Correction contrôle n°5

ex 1

$$f(x)=\frac{2x^2+9x+6}{x^2+3x+2}=\frac{2x^2+9x+6}{(x+2)(x+1)}$$

(28)

- $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-2,-1\}$ (2)
- Z_f : $2x^2+9x+6=0$

$$\Delta=81-4\cdot2\cdot6=33$$

$$x_{1,2}=\frac{-9\pm\sqrt{33}}{4} \to x_1\simeq-3{,}7 \quad \to x_2\simeq-0{,}8$$

$$Z_f=\left\{\frac{-9\pm\sqrt{33}}{4}\right\}\simeq\{-3{,}7;-0{,}8\}$$ (3)

- $f(0)=\frac{6}{2}=3$

- as. vert : candidats $x=-2$ et $x=-1$

$x=-2$: type? "$\frac{2(-2)^2+9(-2)+6}{0}$" = "$\frac{-4}{0}$" $\Rightarrow$ type "$\frac{1}{0}$" $\Rightarrow$ as. vert

$$\lim_{x\to-2^-} f(x)=\frac{-4}{0^-\cdot(-1)}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-2^+} f(x)=\frac{-4}{0^+(-1)}=+\infty$$

$\Big\}$ $x=-2$ as. vert de f (3)

$x=-1$: type? "$\frac{2(-1)^2+9(-1)+6}{0}$" = "$\frac{-1}{0}$" $\Rightarrow$ type "$\frac{1}{0}$" $\Rightarrow$ as. vert

$$\lim_{x\to-1^-} f(x)=\frac{-1}{1\cdot0^-}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-1^+} f(x)=\frac{-1}{1\cdot0^+}=-\infty$$

$\Big\}$ $x=-1$ as. vert de f (3)

- as horiz/obl : deg(num) = deg(dénom) $\Rightarrow$ as horiz.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\cancel{x^2}(2+9/x+6/x^2)}{\cancel{x^2}(1+3/x+2/x^2)}=\frac{2}{1}=2 \Rightarrow y=2 \text{ as horiz de } f \text{ à } \pm\infty$$ (3)

- $$f'(x)=\frac{(4x+9)(x+2)(x+1)-(2x+3)(2x^2+9x+6)}{[(x+2)(x+1)]^2}$$

$$=\frac{(4x+9)(x^2+3x+2)-(4x^3+6x^2+18x^2+27x+12x+18)}{(x+2)^2(x+1)^2}$$

$$=\frac{\cancel{4x^3}+9x^2+12x^2+27x+8x+\cancel{18}-\cancel{4x^3}-24x^2-39x-\cancel{18}}{(x+2)^2(x+1)^2}$$

$$=\frac{-3x^2-4x}{(x+2)^2(x+1)^2}=\frac{-x(3x+4)}{(x+2)^2(x+1)^2}$$ (4)

• zeros de $f' = \{ -\frac{4}{3} ; 0 \}$

• tabl :

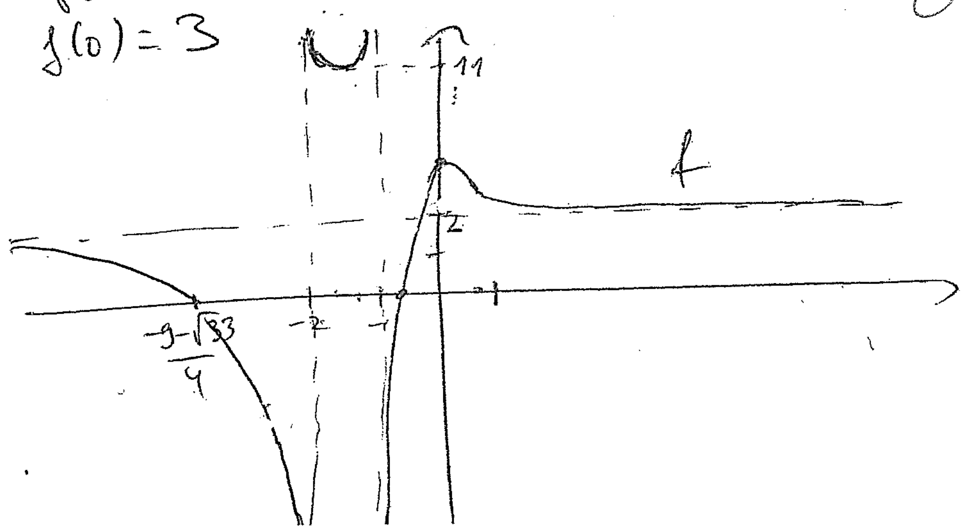
x		-2		$-4/3$		-1		0	
$-x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$3x+4$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$(x+1)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$(x+2)^2$	$+$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$	max	$\nearrow$		$\nearrow$	min	$\searrow$

(4)

<u>max:</u> $f(-4/3) = 11$

<u>min:</u> $f(0) = 3$

(2)



(4)

<u>ex 2</u>

/14

x, y les 2 nbres.

$x + y = 80$

xy^3 max

(3)

$\hookrightarrow f(x) = x(80-x)^3$.

$f'(x) = (80-x)^3 + x \cdot 3 \cdot (80-x)^2(-1)$

$= (80-x)^2 [(80-x) - 3x]$

$= (80-x)^2 \cdot 4 \cdot (20-x)$

(2)

x	0		20		80
$(60-x)^2$		$+$	$+$	$+$	0
$15-x$		$+$	0	$-$	$-$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$		$\nearrow$	max	$\searrow$	

(3)

a) le max. est atteint pour $x = 20$

et donc pour $\begin{cases} x = 20 \\ y = 80 - 20 = 60 \end{cases}$

les 2 nombres sont 20 et 60

(3)

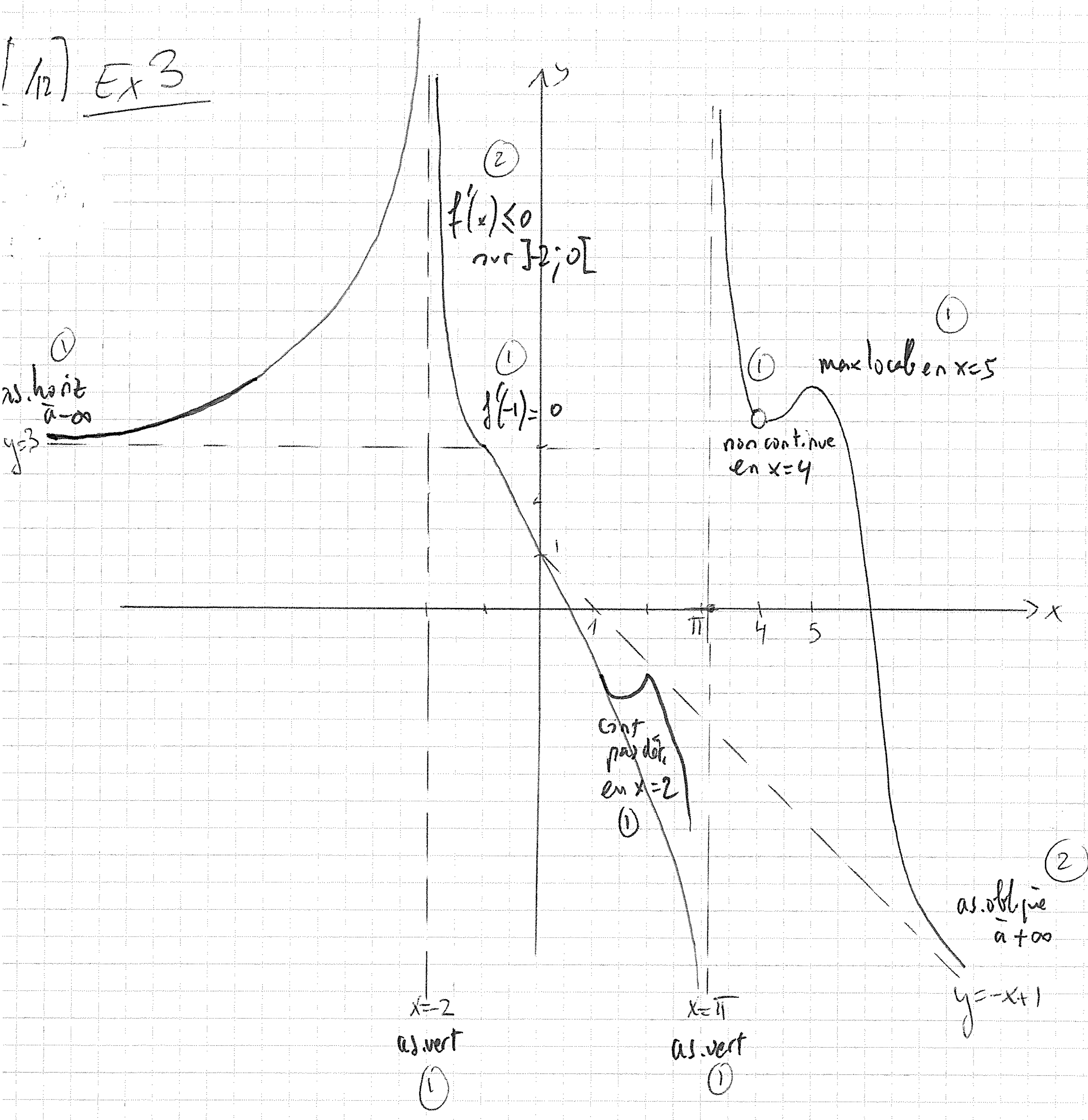
b) le minimal est atteint sur les bords de l'intervalle : $x = 0$ et $y = 80$

ou $x = 80$ et $y = 0$

les 2 nbres sont 0 et 80. (et le produit vaut 0 !)

(3)

[/12] Ex 3


y
x
1
1
π
4
5
f'(x) ≤ 0 sur]-2;0[
f'(-1) = 0
as. horiz à -∞
y=3
non continue en x=4
max local en x=5
cont pas dér. en x=2
as. oblique à +∞
y=-x+1
x=-2
as. vert
x=π
as. vert

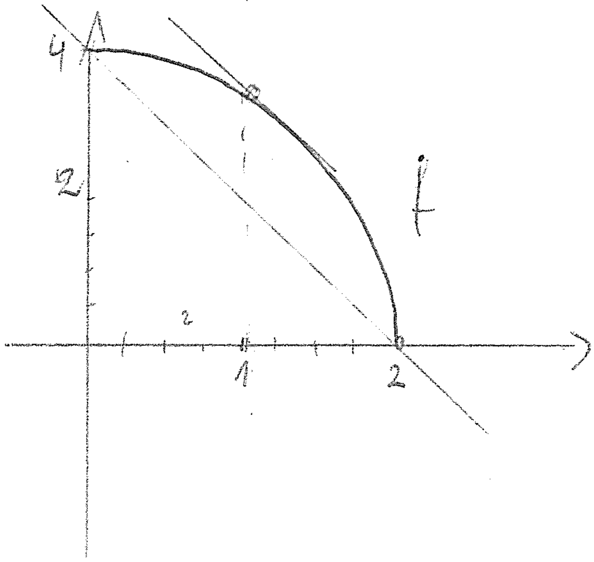
Jct 1

Ex 4

(a) Thm:

Si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ alors il existe au moins un $c \in]a,b[$ tq $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (3)

(b)



$f'(x) = (4-x^2)' = -2x$

$f'(c) = \frac{f(2)-f(0)}{2-0}$

$\Leftrightarrow -2c = \frac{0-4}{2}$

$\Leftrightarrow -2c = -2$ (4)

$\Leftrightarrow c = 1$

en $(1, f(1))$, c-à-d en $(1;3)$, la tangente à f est parallèle à la droite passant par $(0;4)$ et $(2;0)$

(c)

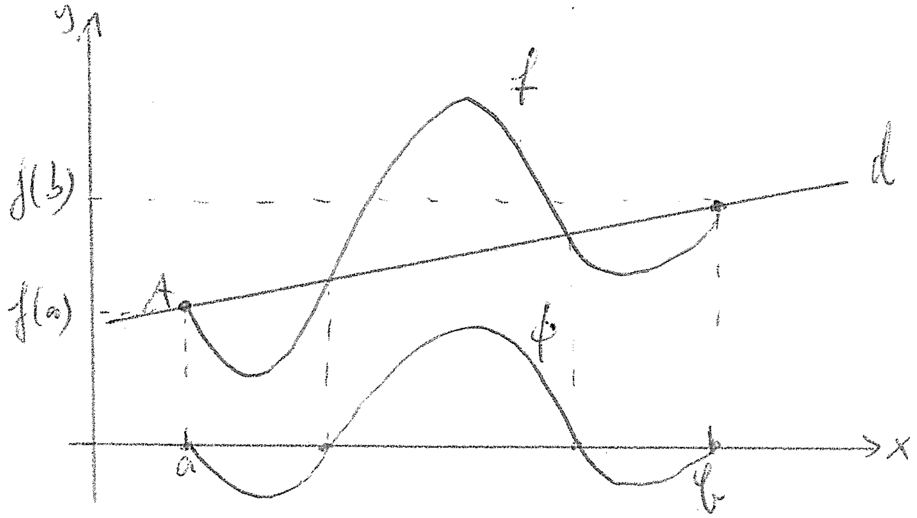
23 pts

(c) On donne ci-dessous une démonstration de ce théorème; compléter les .... et, pour chaque [ARG...], donner les arguments qui manquent (vous pouvez répondre directement sur l'énoncé):

Démonstration :

Pour démontrer ce théorème on utilise une fonction auxiliaire Φ qui est définie comme la distance algébrique entre les graphiques de ....f...... et de la droite d passant par les points $A=(a\,;f(a))$ et ..B(b ; f(b)).. :

Illustrer ci-dessous cette situation, en particulier représenter la fonction Φ et d :



on pose donc : $\Phi(x)=[$....f(x)....$]-d(x)$,

La pente de d est égale à ....$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$....

car [ARG 1 : ...c'est la déf de la pente...]

on a :

- Φ est continue sur ...[a ; b]...,

  car [ARG 2 :

  ...par hyp. f l'est et d est fct polyn de 1er degré l'est aussi nous admettons que la diff. de 2 fcts cont. l'est aussi...]

- Φ est dérivable sur ...]a ; b[... ,

  car [ARG 3 :

  ...par hyp. f l'est et d fct polyn 1er degré l'est aussi on a démontré que la diff. de 2 fct dér. l'est aussi...

- $\Phi(a)=0$ et $\Phi(b)=0$,
- car [ARG 4 :

  ...φ(b) = f(b) − d(b) = 0 = f(a) − d(a)...]

La fonction Φ satisfait donc les hypothèses du théorème ...de Rolle...

Donc il existe un point ....c.... dans l'intervalle $]a\,;b[$ tel que $\Phi'(c)=0$, car

[ARG 5 : ...c'est la conclusion du thm de Rolle...]

Or $\Phi'(x)=$ ....$f'(x)$.... – ....$d'(x)$.... , |

car [ARG 6 : ....thm sur "dérivée de la différence".......] ||

donc $\Phi'(x)=f'(x)-$ ....$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.... , |

car [ARG 7 : ....$(px+q)'=p$ et ici $p=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$....] |

ainsi : $\Phi'(c)=$ ....$f'(c)$.... $-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, |

car [ARG 8 : ....on a posé $x=c$....] |

Or ~~càd~~ $\Phi'(c)=$ ....0.... , |

car [ARG 9 : ....par ARG 5....] |

Ainsi il existe bien un $c\in]a;b[$ tel que ....$f'(c)$.... $=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, |

~~car [ARG 10~~ $\rightsquigarrow$ ....$0=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Leftrightarrow f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$....] |

tot : 32 pts : 2 → 16 pts