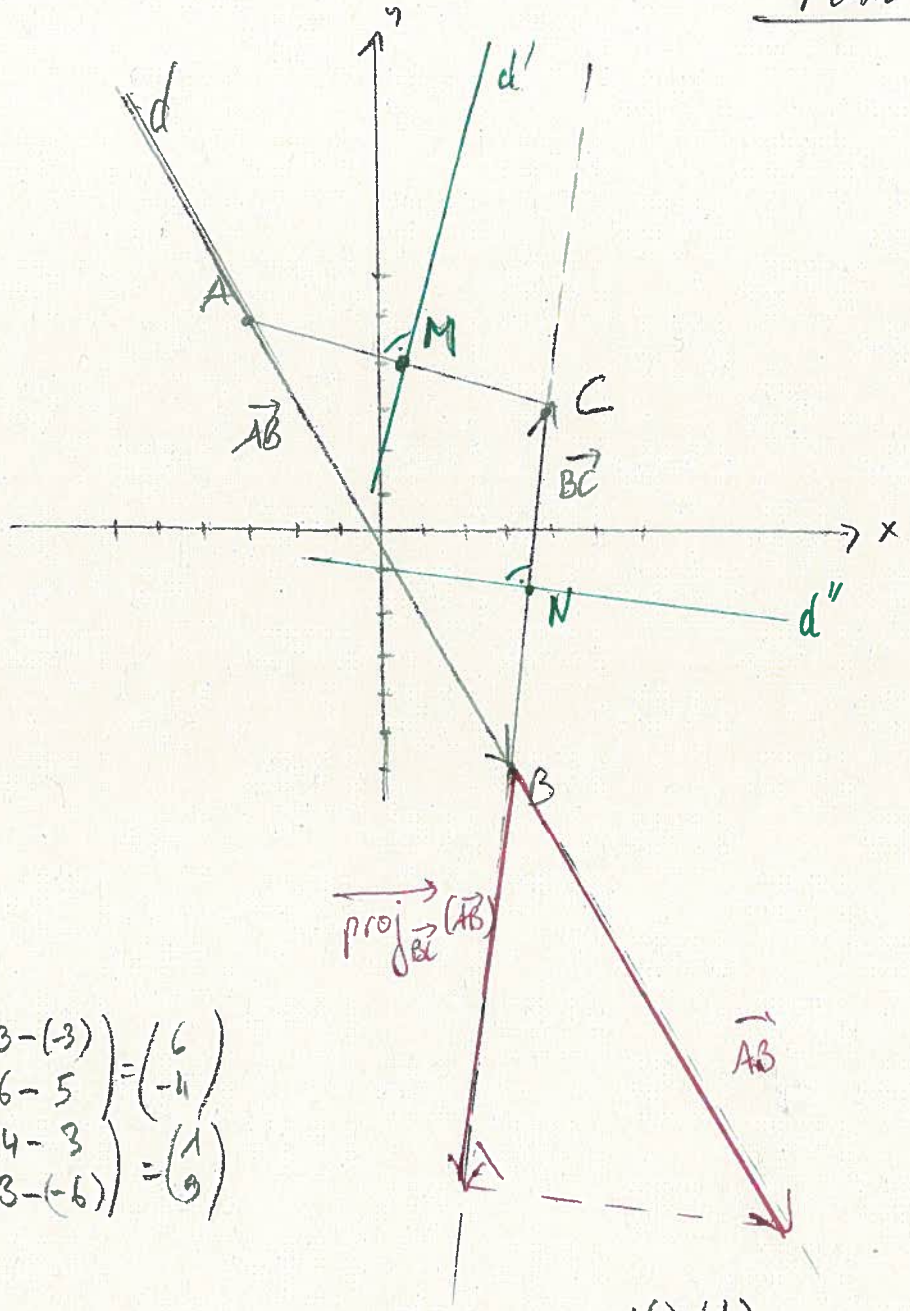
Math 3N Cor. Tr 98 n°4

15.5.2012

Ex 2



$\vec{AB}\begin{pmatrix}3-(-3)\\-6-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-11\end{pmatrix}$

$\vec{BC}\begin{pmatrix}4-3\\3-(-6)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\9\end{pmatrix}$

(a) $\overrightarrow{proj}_{\vec{BC}}(\vec{AB}) = \dfrac{\vec{AB}\cdot\vec{BC}}{\|\vec{BC}\|^2}\cdot\vec{BC} = \dfrac{\begin{pmatrix}6\\-11\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\9\end{pmatrix}}{1^2+9^2}\begin{pmatrix}1\\9\end{pmatrix} = \dfrac{6\cdot1+(-11)\cdot9}{82}\begin{pmatrix}1\\9\end{pmatrix}$

$= -\dfrac{93}{82}\begin{pmatrix}1\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-93/82\\-837/82\end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix}-1,1\\-10,2\end{pmatrix}$ (4)

$\|\overrightarrow{proj}_{\vec{BC}}(\vec{AB})\| = \sqrt{\left(\frac{-93}{82}\right)^2+\left(\frac{-837}{82}\right)^2} \simeq 10,3$ (2)

(b) $\vec{AB}$ vect. directeur de d

$P(x;y)\in d \Leftrightarrow \vec{AP} = \lambda\vec{AB} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x+3\\y-5\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}6\\-11\end{pmatrix}$ éq. vectorielle de d (3)

$\Leftrightarrow \begin{cases}x+3=6\lambda\\y-5=-11\lambda\end{cases}$ syst. éq. param de d (1)

$\Leftrightarrow \begin{cases}x+3=6\lambda \mid 11\\y-5=-11\lambda \mid 6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l}11x+33=66\lambda\\6y-30=-66\lambda\end{array}$

$11x+6y+3=0$ éq. cartésienne de d (2)

(c) M = milieu de $[AC] = \left(\frac{-3+4}{2}, \frac{5+3}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 4\right) \in d'$

$\vec{AC}$ vect. normal de d'

$P(x;y) \in d' \Leftrightarrow \vec{MP} \cdot \vec{AC} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - \frac{1}{2} \\ y - 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow 7x - 7/2 - 2y + 8 = 0$

$\Leftrightarrow 7x - 2y + 9/2 = 0$ (3)

N milieu de $[BC] = \left(\frac{3+4}{2}, \frac{-6+3}{2}\right) = \left(\frac{7}{2}; -\frac{3}{2}\right)$

$\vec{BC}\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$ vect. normal de d''

$P(x;y) \in d' \in NP \ \vec{BC} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - 7/2 \\ y + 3/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix} = 0$

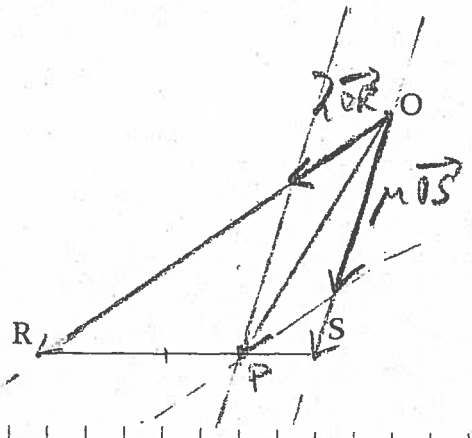
$\Leftrightarrow x - 7/2 + 9y + 27/2 = 0$

$\Leftrightarrow x + 9y + 10 = 0$ (3)

Ex 1

(a) (b)

(4) (3)



(b) $\vec{OP} = \frac{1}{4}\vec{OR} + \frac{3}{4}\vec{OS}$

(c) $\vec{OP} = \vec{OS} + \vec{SP} = \vec{OS} + \frac{1}{4}\vec{SR} = \vec{OS} + \frac{1}{4}(\vec{OR} - \vec{OS})$

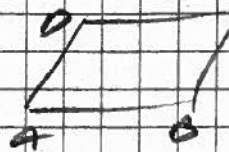
$= \vec{OS} + \frac{1}{4}\vec{OR} - \frac{1}{4}\vec{OS} = \frac{1}{4}\vec{OR} - \frac{3}{4}\vec{OS}$ (3)

Ex 3 :

[/8]

(a) $\vec{AB}\begin{pmatrix}-4\\0\\4\end{pmatrix}$ $\vec{AC}\begin{pmatrix}-1\\-2\\5\end{pmatrix}$ $\Big\}$ $\vec{AB} \neq k\vec{AC}$ donc A, B, C ne sont pas alignés (3)

(b) ABCD parall. $\Leftrightarrow \vec{AB} = \vec{DC} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-4\\0\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0-x\\0-y\\5-z\end{pmatrix}$



$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}4\\0\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-x\\-y\\5-z\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4\\y=0\\z=1\end{cases}$

$D(4;0;1)$ (2)

(c) Aire ABCD $= \|\vec{AB} \times \vec{AD}\| = \left\|\begin{pmatrix}-4\\0\\4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}3\\-2\\-1\end{pmatrix}\right\| = \left\|\begin{pmatrix}0+8\\-(+4-12)\\8-0\end{pmatrix}\right\|$

$= \left\|\begin{pmatrix}8\\16\\8\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{8^2+16^2+8^2} = \sqrt{384} \approx 19,6$ (3)

Ex 4

/12 a) **Méthode 1 :**

$\exists ? \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tq $\vec{u} = \lambda \vec{v} + \mu \vec{w}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 2\mu & (1) \\ 2 = -\lambda + 3\mu & (2) \\ -3 = 2\lambda - 4\mu & (3) \end{cases}$$

dans (1) : $\mu = \frac{1}{2}$

dans (2) : $2 = -\lambda + 3\cdot\frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{2} - 2 = -\frac{1}{2}$

(5) ⚠ Vérif dans (3) : $-3 \overset{?}{=} 2\left(-\frac{1}{2}\right) - 4\left(\frac{1}{2}\right)$

$-3 \overset{?}{=} -1 - 2$ ok

donc $\vec{u} = \left(-\frac{1}{2}\right)\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$, càd $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires

Méthode 2 :

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ne sont pas colinéaires 2 à 2 (aucun multiple de l'autre !)

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ coplanaires $\Leftrightarrow (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4-3 \\ -(2-0) \\ -1-0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 0 \quad (5)$$

$\Leftrightarrow 2 - 6 + 4 = 0$ ok ! donc $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ coplanaires

(b) $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vecteur normal de π

$P(x,y,z) \in \pi \Leftrightarrow \overrightarrow{OP} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \\ z-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -x - 2 - y + 1 + z - 3 = 0$

$\Leftrightarrow -x - y + z - 4 = 0$ (4)

(c) $d(\Pi ; R) = \dfrac{|1-11-2(-2)-(-3)+7|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-1)^2}} = \dfrac{|3|}{\sqrt{6}} = \dfrac{3}{\sqrt{6}} \approx 1,2$ (3)

Ex 5

1/13

(a) $B(0;0;2) \in \mathcal{U}$ car $0-2\cdot 0+2=0$! (2)

(b) ① : $\mathcal{U}_1$: $x+2y+z=2$ | ×1
② : $\mathcal{U}_2$: $2x+y-3z=9$ | ×2

$5x-5z=20$

Choisissons $x=1$ et $z=-3$

puis ② : $2\cdot 1+y-3(-3)=9$

$y=-2$

$C(1;-2;-3)$ (par exemple...) (4)

(c) On choisit un autre point de $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$; disons D :

$x=-1$ et $z=-5$

puis dans ② : $2(-1)+y-3(-5)=9$

$y=-4$

$D(-1;-4;-5)$

donc $\vec{CD}\begin{pmatrix}-1-1\\-4+2\\-5+3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2$ (4)

donc aussi de d

$P(x;y;z) \in d \Leftrightarrow \vec{AP} = 2\vec{CD} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x-3\\y+1\\z-6\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3=-2\lambda \\ y+1=-2\lambda \\ z-6=-2\lambda \end{cases}$

$\Leftrightarrow \lambda = \left[\dfrac{x-3}{-2} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-6}{-2}\right]$ ou $\begin{cases} x+3=y+1 \\ y+1=z-6 \end{cases}$ (3)