Ma3N Corr travail n°3

ex1: $f(x) = \dfrac{-2x^2+7x-5}{x-2}$

1/a) D_f : $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ (1)

Z_f : $-2x^2+7x-5=0$

$\Delta = 49 - 4(-2)(-5) = 9$

$x_{1,2} = \dfrac{-7 \pm 3}{-4}$ $\to x_1 = 5/2$, $\to x_2 = +1$

$Z_f = \left\{1, \frac{5}{2}\right\}$ (3)

as.vert : candidat $x=2$

type "$\frac{1}{0}$" donc as.vert..

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \dfrac{-8+14-5}{0^-} = \dfrac{1}{0^-} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \dfrac{1}{0^+} = +\infty$

$x=2$ as.vert de f (3)

as.horiz/obl : deg(num) = deg(dénom) + 1 $\Rightarrow$ as.oblique

$$\begin{array}{r|l} -2x^2+7x-5 & x-2 \\ \hline -2x^2+4x & -2x+3 \\ \hline 3x-5 & \\ 3x-6 & \\ \hline 1 & \end{array}$$

(2)

$\Rightarrow f(x) = -2x+3 + \dfrac{1}{x-2}$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - (-2x+3)\right] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{x-2} = 0$

donc $y = -2x+3$ as oblique de f à $\pm\infty$ (2)

f' : $f'(x) = \dfrac{(-4x+7)(x-2) - (-2x^2+7x-5)\cdot 1}{(x-2)^2}$

$= \dfrac{-4x^2+\cancel{7x}+8x-14+2x^2-\cancel{7x}+5}{(x-2)^2} = \dfrac{-2x^2+8x-9}{(x-2)^2}$ (3)

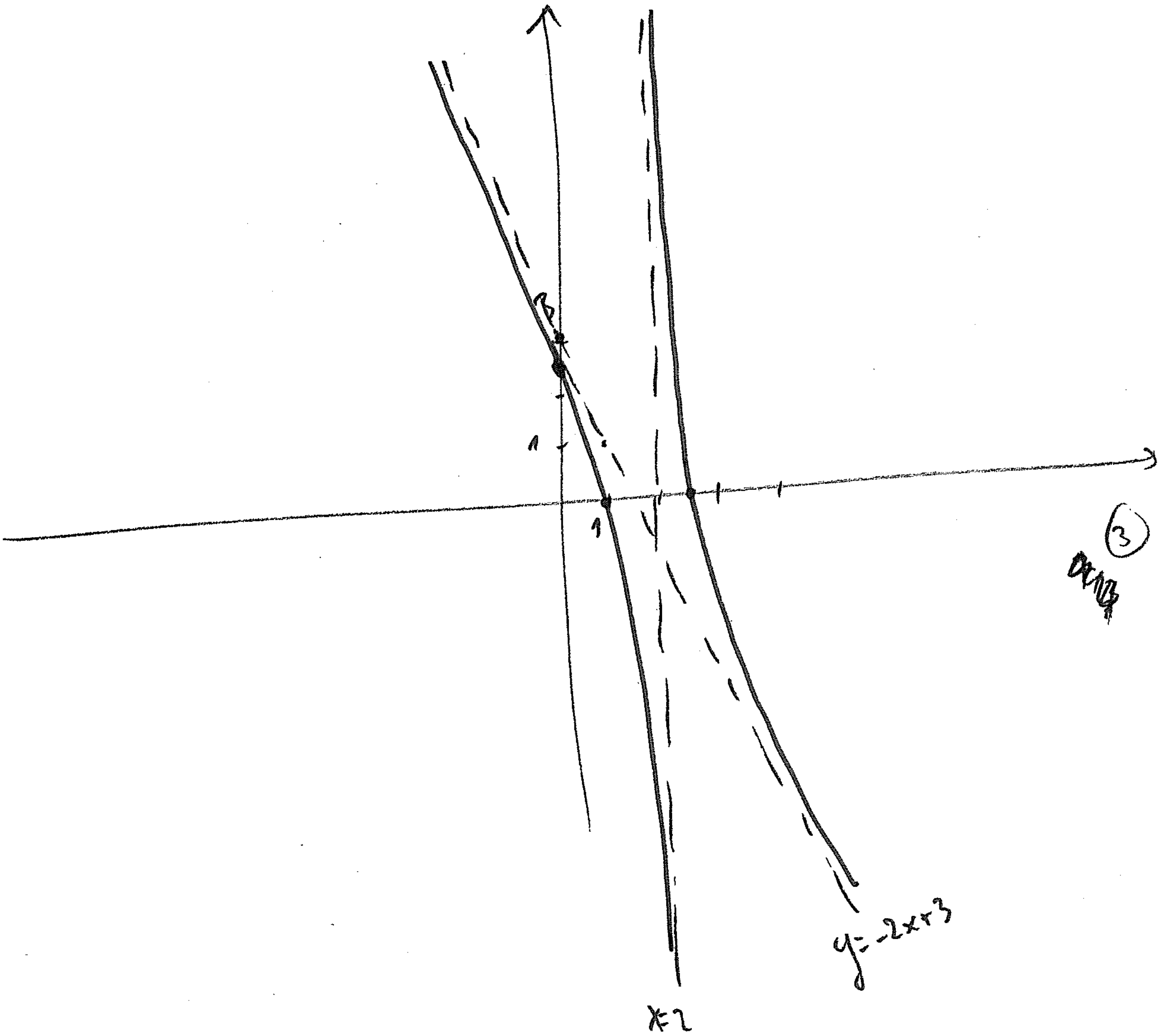
$Z_{f'}$: $-2x^2+8x-9=0$

$\Delta = 64-4(-2)(-9) < 0$

$Z_{f'} = \emptyset$ (1)

x		2	
$-2x^2+8x-5$	$-$	$-$	$-$
$(x-2)^2$	$+$	$\|\|$	$+$
$f'(x)$	$-$	$\|\|$	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\searrow$

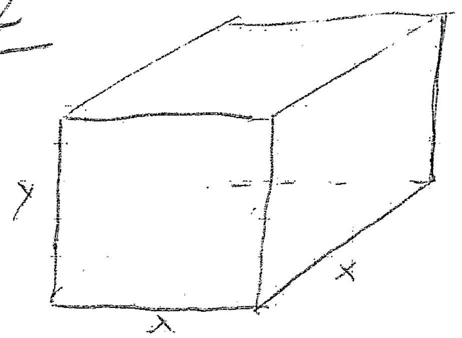
3



3

Ex2

[14]



Volume $x^2 y = 108 \Leftrightarrow y = \frac{108}{x^2}$,

Surface $\underbrace{x^2}_{\text{fond}} + \underbrace{4xy}_{\text{4 faces}}$ à optimiser

(4)

donc $f(x) = x^2 + 4x \cdot \frac{108}{x^2} = x^2 + \frac{432}{x}$

$f'(x) = 2x + 432\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x - \frac{432}{x^2} = \frac{2x^3 - 432}{x^2}$ (2)

Zf' : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2x^3-432}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 432 = 0$

$\Leftrightarrow x^3 = 216$

$\Leftrightarrow x = 6$

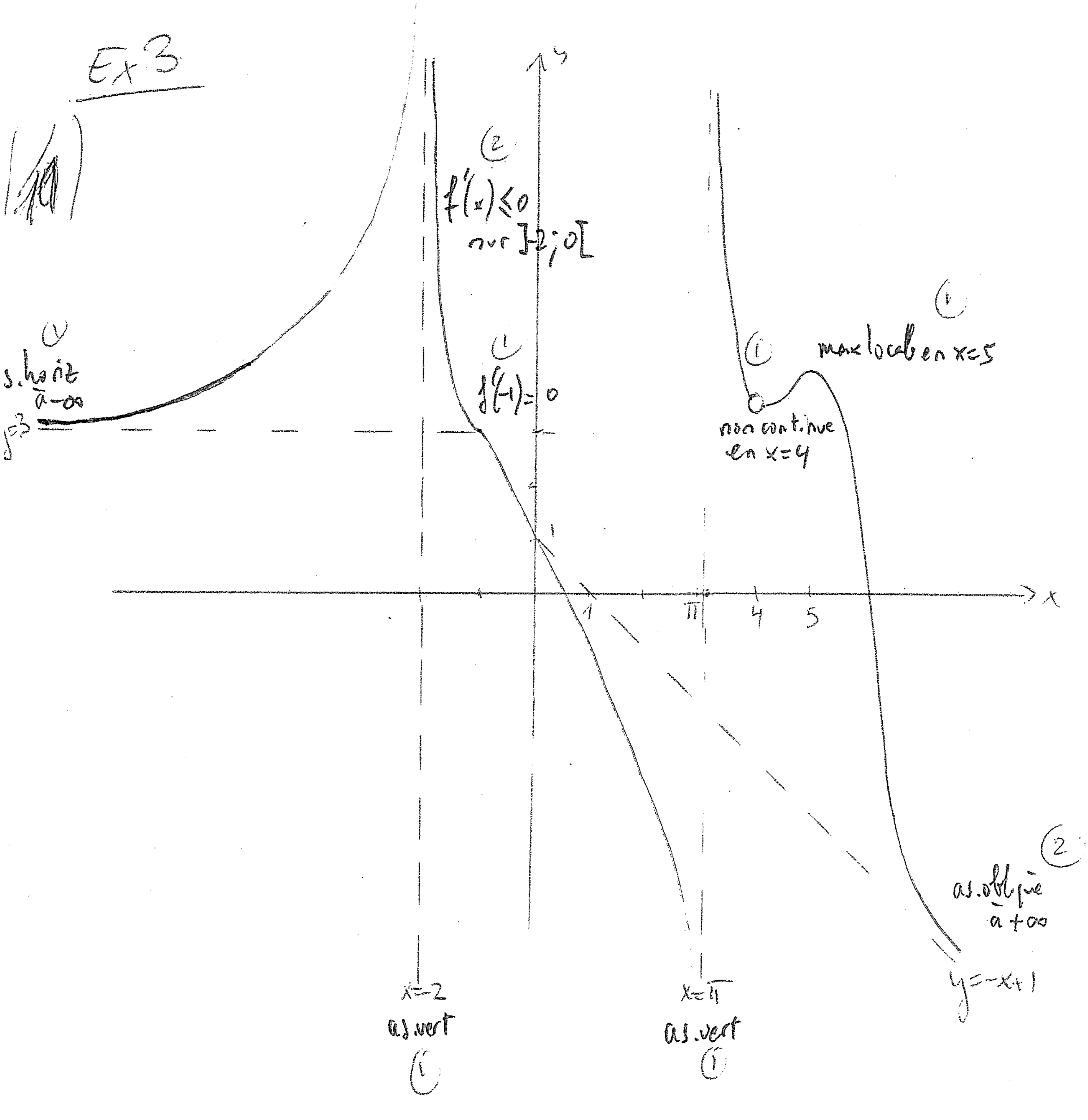
x	0		6	
$2x^3-432$		$-$	0	$+$
x^2	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	//	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	min	$\nearrow$

(4)

La surface est minimale pour $x = 6$ m, soit une boîte de 6×6 m de base et $y = \frac{108}{36} = 3$ m de hauteur (2)

Elle vaut alors $f(6) = 36 + \frac{432}{6} = 108$ m (2)

Ex 3



y
x
s.horiz à $-\infty$
$y=3$
$f'(x) \leq 0$ sur $]-2;0[$
$f'(-1)=0$
1
1
π
4
5
non continue en $x=4$
max local en $x=5$
as.oblique à $+\infty$
$y=-x+1$
$x=-2$
as.vert
$x=\pi$
as.vert

Jct (1)

Ex 4

1(9) a) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ et
- dérivable sur $]a; b[$
- continue sur $[a; b]$

et si $f'(x) \geq 0$ sur $]a; b[$ $\Big\}$ Hyp

alors $f(x)$ est croissante sur $[a; b]$ $\}$ Concl (4)

b) Il nous permet, en étudiant le signe de $f'(x)$, de déterminer les extrema de $f(x)$ à partir de la connaissance de sa (dé)-croissance (3)

c)

Démonstration pour le cas où $f'(x) > 0$ sur $]a;b[$

Soit $x \in [a;b]$ et $y \in [a;b]$, avec $x < y$.

On a :

f est dérivable sur $]x;y[$, car

[ARG 1: ......par hypothèse......] (1)

f est continue sur $[x;y]$, car

[ARG 2: ......par hypothèse......] (1)

Donc on peut appliquer le théorème des accroissements finis à f sur l'intervalle [...[x;y]...] (1)

car
[ARG 3:......~~]x;y[~~ le hyp. du thm AF sont vérifiées......] (1)

On a alors :
il existe un $c \in$ [...]x;y[...] tel que $f'(c) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$ (1)

car
[ARG 4:......c'est la conclusion du thm AF......] (1)

Or, on sait que $y -$ [......x......] > 0, (1)

car [ARG 5:......par choix x < y......] (1)

et que $f'(c) > 0$,

car [ARG 6:......par hypothèse......] (1)

donc $f(y) - f(x) >$ [......0......], (1)

car [ARG 7:......$+ = \frac{+}{+}$ règle des signes......] (1)

c'est-à-dire $f(y) > f(x)$, pour tout choix de x et y avec $x < y$.

C'est ce qu'il fallait démontrer,

car [ARG 8:......c'est la déf de la croissance......] (1)

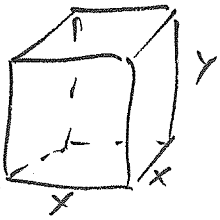
12 pts

Suite du travail

Exercice 1 (environ 3 points)

On veut construire une boîte métallique de la forme d'un parallélépipède de base carrée ouverte sur le haut. Son volume doit être de $62,5\,m^3$.
Déterminer ses dimensions (longueur du côté de la base et hauteur) pour que la surface totale de métal utilisée soit minimale.

Indication : si vous n'arrivez pas à déterminer la fonction à optimiser, vous pouvez partir de la fonction f définie par $f(x)=\frac{x^3+432}{x}$ (qui n'est pas la réponse exacte à la question!).



à optimiser : aire totale $= x^2+4xy$

on sait : $V = x\cdot x\cdot y = 62,5$

$$y = \frac{62,5}{x^2}$$

d'où : $f(x) = x^2 + 4x\cdot\frac{62,5}{x^2} = x^2 + \frac{250}{x}$

$$f'(x) = 2x - \frac{250}{x^2} = \frac{2x^3-250}{x^2} = \frac{2(x^3-125)}{x^2}$$

$Z_{f'} = \{5\}$

		0		5	
$2(x^3-125)$	−	−	−	0	+ +
x^2		0	+	+	+
$f'(x)$		‖	−	0	+
$f(x)$			↘	min	↗

le minimum est atteint pour $\begin{cases} x = 5\,m \\ y = \frac{62,5}{25} = 2,5\,m \end{cases}$

la surface vaut alors $f(5) = 25 + \frac{250}{5}$
$= 75\,m^2$