Math 3N : Ch 0 Prérequis – Corrigés des exercices

1]

a) $-2-[4-3(-7-1)-(10-6+4-3\cdot3)\cdot9+8(-3)]$

$=-2\cdot[4-3(-8)-(10-6+4-9)\cdot9-24]$

$=-2[4+24-(-1)\cdot9-24]$

$=-2[4+24+9-24]=-2\cdot13=-26$

b) $\frac{12}{16}+\frac{5}{12}-\frac{3}{9}=\frac{3}{4}+\frac{5}{12}-\frac{1}{3}=\frac{9+5-4}{12}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$

c) $\frac{\cancel{33}^{3}}{\cancel{48}}\cdot\frac{\cancel{24}^{1}}{\cancel{44}_{4}}\div\frac{5}{6}=\frac{3}{8}\div\frac{5}{6}=\frac{3}{\cancel{8}_4}\cdot\frac{\cancel{6}^{3}}{5}=\frac{9}{5}$

d) $\frac{a^{-36}a^{5}}{(a^{-5})^{7}}=\frac{a^{-31}}{a^{-35}}=a^{-31+35}=a^{4}$

e) $\frac{(2^5)^{-19}\cdot(2^3)^{-40}\cdot\left((2\cdot5)^{19}\right)^{3}}{[5^{-14}\cdot2^{-1}(2^2)^{20}]^{-4}}=\frac{2^{-95}\cdot2^{-120}\cdot2^{57}\cdot5^{57}}{(5^{-14}\cdot2^{39})^{-4}}$

$=\frac{2^{-158}\cdot5^{57}}{5^{56}\cdot2^{-156}}=\frac{5}{2^2}=\frac{5}{4}$

f) $\frac{\sqrt{640}}{\sqrt{1000}}=\sqrt{\frac{640}{1000}}=\sqrt{\frac{64}{100}}=\frac{8}{10}=\frac{4}{5}$

$\left(=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}\right)$

g) $\frac{16}{\sqrt{8}+4}=\frac{16}{\sqrt{4\cdot2}+4}=\frac{2\cdot8}{2\sqrt2+4}=\frac{\cancel{2}\cdot8}{\cancel{2}(\sqrt2+2)}=\left(\frac{8}{\sqrt2+2}\right)\cdot\frac{(\sqrt2-2)}{(\sqrt2-2)}$

$=\frac{8(\sqrt2-2)}{(\sqrt2)^2-2^2}=\frac{8(\sqrt2-2)}{-2}=-4(\sqrt2-2)\ (=-4\sqrt2+8)$

h) $\frac{\sqrt{18}+\sqrt{12}}{\sqrt3}=\frac{\sqrt{9\cdot2}+\sqrt{4\cdot3}}{\sqrt3}=\left(\frac{3\sqrt2+2\sqrt3}{\sqrt3}\right)\cdot\left(\frac{\sqrt3}{\sqrt3}\right)$

$=\frac{3\sqrt2\cdot\sqrt3+2\sqrt3\cdot\sqrt3}{(\sqrt3)^2}=\frac{3\sqrt6+2\cdot3}{3}=\frac{\cancel{3}(\sqrt6+2)}{\cancel{3}}=\sqrt6+2$

2] $0,000000089787=8,9787\cdot10^{-8}$

3]

$$\begin{array}{r|l} 19 & 7 \\ -14 & 2,714285\,71\ldots \\ 50 & \\ -49 & \\ 10 & \\ -7 & \\ 30 & \\ -28 & \\ 20 & \\ -14 & \\ 60 & \\ -56 & \\ 40 & \\ -35 & \\ 50 & \end{array}$$

donc $\frac{19}{7}=2,\overline{714285}$

4] $x=12,4\overline{56}$

$10x=124,\overline{56}$

$1000x=12456,\overline{56}$

donc :

$$\begin{array}{rcl} 1000x & & 12456,\overline{56} \\ -\ 10x & & -\ 124,\overline{56} \\ \hline 990x & = & 12332 \end{array}$$

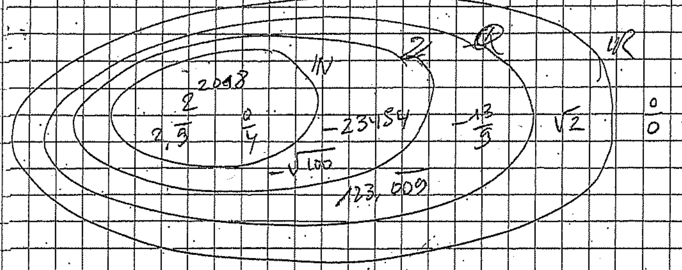
c-à-d $990x=12332 \quad |\div990$

$\Leftrightarrow x=\frac{12332}{990}$

$=\frac{6166}{495}$

donc : $12,4\overline{56}=\frac{6166}{495}$

5]



6] (i) $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{Z}$ (iii) $-3,\overline{9} = -4 \in \mathbb{Z}$ (v) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N} = \mathbb{N}$

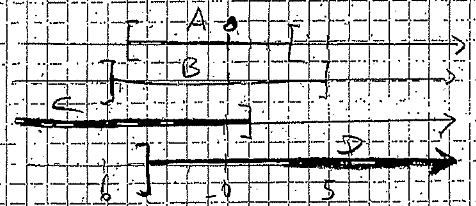
(ii) $-\sqrt{-8} \notin \mathbb{R}$ (iv) $1,\overline{9} = 2$ (vi) $\mathbb{Q} \setminus \{0\} = \mathbb{Q}^*$

7] A $[-5,5[$

B $\{x \in \mathbb{R} / -6 < x \le 5\}$

C $]-\infty;1]$

D $\{x \in \mathbb{R} / -4 < x\}$



(i) $A \cup B = B =]-6,5]$ (iii) $A \setminus B = \emptyset$

(ii) $C \cap D =]-4,1]$ (iv) $C \cup D =]-\infty;-6]$

8] a) $7x^2+5x-2$

$a=7 / b=5 / c=-2$

$\Delta = b^2-4ac = 5^2-4\cdot7\cdot(-2) = 81$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 \pm 9}{14} \rightarrow x_1 = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$

$\rightarrow x_2 = -\frac{14}{14} = -1$

donc $7x^2+5x-2 = a(x-x_1)(x-x_2) = 7(x-\frac{2}{7})(x+1)$

$\left(= 7(\frac{7x-2}{7})(x+1) = (7x-2)(x+1) \right)$

b) $12x^3y-3xy^3 = 3xy[4x^2-y^2] = 3xy(2x-y)(2x+y)$

c) $3(x-1)^2-9(x-1) = 3(x-1)\cdot[(x-1)-3]$

$= 3(x-1)\cdot(x-4)$

d) $7a^3b^4c-28a^3b^3c^2+28a^3b^2c^3 = 7a^3b^2c[b^2-4ac+4c^2]$

$= 7a^3b^2c(b-2c)^2$

e) $(5x-10)(4x^2-5)-(-13x^2+6)(10-5x)$

$= (5x-10)(4x^2-5)+(-13x^2+6)(5x-10)$

$= (5x-10)\cdot[4x^2-5+(-13x^2+6)] = (5x-10)\cdot[-9x^2+1]$

$= 5(x-2)(1-3x)(1+3x)$

f) $49x^2+28x+4 = (7x+2)^2$

g) $x^2+5x-14 = (x+7)(x-2)$

h) $2x^2+16x+24 = 2(x^2+8x+12) = 2(x+6)(x+2)$

i) $3x^2+3x-36 = 3(x^2+x-12) = 3(x+4)(x-3)$

j) $(3a+2b)^2-(a-7b)^2 = [(3a+2b)-(a-7b)][(3a+2b)+(a-7b)]$

$= (2a+9b)(4a-5b)$

9]

$6x^3 - 5x^2 - 17x + 6 = f(x)$

$a_0 = 6 \quad Div_6 = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4\}$

on teste avec la calculatrice : $f(1) \neq 0 \quad f(-1) \neq 0$
$f(2) = 0$
↳ donc $(x-2)$ divise $f(x)$

$$\begin{array}{r|l} 6x^3 - 5x^2 - 17x + 6 & x-2 \\ \hline -\ (6x^3 - 12x^2) & 6x^2 + 7x - 3 \\ 7x^2 - 17x + 6 & \\ -\ (7x^2 - 14x) & \\ -3x + 6 & \\ -\ (-3x + 6) & \\ 0 & \end{array}$$

donc $f(x) = \underbrace{(6x^2 + 7x - 3)}_{\text{degré } 2}(x-2)$

$a = 6 \ / \ b = 7 \ / \ c = -3$

$\Delta = 7^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-3) = 121$

$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{121}}{12} \nearrow x_1 = 1/3$, $\searrow x_2 = -3/2$

donc $(6x^2 + 7x - 3) = a(x - x_1)(x - x_2)$

$= 6(x - \frac{1}{3})(x + \frac{3}{2})$

$= 6(\frac{3x-1}{3})(\frac{2x+3}{2})$

$= (3x-1)(2x+3)$

donc $f(x) = (x-2)(3x-1)(2x+3)$

10]

(a) $-\frac{1}{3}x - (\frac{5}{2} - x) = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{6}$) distribuer

$\Leftrightarrow -\frac{1}{3}x - \frac{5}{2} (+) x = -\frac{4}{3}x + \frac{1}{6}$) déno. commun

$\Leftrightarrow \frac{-2x - 15 + 6x}{6} = \frac{-8x + 1}{6}$) réduire

$\Leftrightarrow \frac{4x - 15}{6} = \frac{-8x + 1}{6}$) $\cdot 6$

$\Leftrightarrow 4x - 15 = -8x + 1$) $+8x$ $+15$

$\Leftrightarrow 12x = 16$) $:12$

$\Leftrightarrow x = \frac{16}{12}$) simplifier

$\Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$

$S = \{\frac{4}{3}\}$

(b) $-(5x - 1) = (-3)x + 8 + (-2x)$) distribuer / gestion signes

$\Leftrightarrow -5x + 1 = -3x + 8 - 2x$) réduire

$\Leftrightarrow -5x + 1 = -5x + 8$) $+5x$ -1

$\Leftrightarrow 0x = 7$

$S = \emptyset$

(c) $x^2 + 7x = x^2 - 1$) $-x^2$

$\Leftrightarrow 7x = -1$) $:7$

$\Leftrightarrow x = -1/7$

$S = \{-\frac{1}{7}\}$

(d) $(x+1)(x-1) = x^2 - 1$) IR3

$\Leftrightarrow x^2 - 1 = x^2 - 1$) $-x^2 + 1$

$\Leftrightarrow 0 = 0$

$S = \mathbb{R}$

[10]

(e) $4\sqrt{7}x - 0{,}8 = 2\sqrt{7} - 1{,}6x$ | $+1{,}6x + 0{,}8$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{7}x + 1{,}6x = 2\sqrt{7} + 0{,}8$ | mise en évidence

$\Leftrightarrow x(4\sqrt{7} + 1{,}6) = 2\sqrt{7} + 0{,}8$ | $\div (4\sqrt{7} + 1{,}6)$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{2\sqrt{7}+0{,}8}{4\sqrt{7}+1{,}6}$ | mise en évidence

$= \dfrac{2\sqrt{7}+0{,}8}{2(2\sqrt{7}+0{,}8)}$ | simplification

$= \dfrac{1}{2}$

$S = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$

(f) $x^2 - 3x = -4$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 4 = 0$

$\Delta = (-3)^2 - 4\cdot1\cdot4 < 0$

$S = \emptyset$

(g) $3x^2 = 6x + 1$ | $-6x - 1$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 6x - 1 = 0$

$\Delta = (-6)^2 - 4\cdot3\cdot(-1) = 48$

$x_{1,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{48}}{6} = \dfrac{6 \pm 4\sqrt{3}}{6} = \dfrac{2(3 \pm 2\sqrt{3})}{2\cdot3}$ → $x_1 = \dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}$ → $x_2 = \dfrac{3-2\sqrt{3}}{3}$

$S = \left\{\dfrac{3-2\sqrt{3}}{3} ; \dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}\right\}$

h) $x^2 = 121$ | -121

$\Leftrightarrow x^2 - 121 = 0$ | IR3

$\Leftrightarrow (x-11)(x+11) = 0$ | th. produit nul

$x - 11 = 0$ ou $x + 11 = 0$

$x = 11$ $x = -11$

$S = \{\pm 11\}$

ou direct

$x = \pm\sqrt{121}$

$\Leftrightarrow x = \pm 11$

i) $x^2 - 128 = 0$ | $+128$

$\Leftrightarrow x^2 = 128$

$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{128}$ Cas particulier "$x^2 = a$"

$= \pm 8\sqrt{2}$

$S = \{\pm 8\sqrt{2}\}$

[10]

j) $x^2 + 2x = -1$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x + 1 = 0$

$x = -1$

$S = \{-1\}$

k) $(5x-4)^2 = (3x+7)^2$

$\Leftrightarrow (5x-4)^2 - (3x+7)^2 = 0$

$\Leftrightarrow [(5x-4) + (3x+7)][(5x-4) - (3x+7)] = 0$

$\Leftrightarrow (8x+3)(2x-11) = 0$

$8x + 3 = 0$ ou $2x - 11 = 0$

$x = -3/8$ $x = 11/2$

$S = \left\{-\dfrac{3}{8} ; \dfrac{11}{2}\right\}$

l) $x^3 - x = 2x^2 - 2$

$\Leftrightarrow x^3 - x - 2x^2 + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$

$\Leftrightarrow x^2(x-2) - (x-2) = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)[x^2 - 1] = 0$

$x - 2 = 0$ ou $x^2 - 1 = 0$

$x = 2$ $x = \pm 1$

$S = \{-1 ; 1 ; 2\}$

m) $(9x-5)^2 = 9$

$\Leftrightarrow 9x - 5 = \pm 3$

$9x - 5 = 3$ ou $9x - 5 = -3$

$9x = 14$ $9x = -4$

$x = \dfrac{14}{9}$ $x = -4/9$

$S = \left\{-\dfrac{4}{9} ; \dfrac{14}{9}\right\}$

(ou $(9x-5)^2 - 9 = 0$

$\Leftrightarrow (9x-5)^2 - 3^2 = 0$

$\Leftrightarrow [(9x-5) - 3][(9x-5) + 3] = 0$

⋮)

(ou développer → Viète)

10] n) $4x^3 = 36x$
$\Leftrightarrow 4x^3 - 36x = 0$
$\Leftrightarrow 4x(x^2-9) = 0$
$\Leftrightarrow 4x(x-3)(x+3) = 0$ ↓ direct!
$S = \{-3; 0; 3\}$

o) $(3x+2)(x^2-1) = (9x^2-4)(x+1)$
$\Leftrightarrow (3x+2)(x-1)(x+1) - (3x-2)(3x+2)(x+1) = 0$
$\Leftrightarrow (3x+2)(x+1)\left[(x-1) - (3x-2)\right]$
$\Leftrightarrow (3x+2)(x+1)\left[-2x+1\right] = 0$
$3x+2=0$ ou $x+1=0$ ou $-2x+1=0$
$x=-2/3$ $\quad x=-1$ $\quad x=1/2$
$S = \{-1; -2/3; -1/2\}$

p) $x^6 = x^2$
$\Leftrightarrow x^6 - x^2 = 0$
$\Leftrightarrow x^2(x^4-1) = 0$
$\Leftrightarrow x^2(x^2+1)(x^2-1) = 0$
$x^2=0$ ou $x^2+1=0$ ou $x^2-1=0$
$x=0$ $\quad \emptyset$ $\quad x=\pm 1$
$S = \{-1; 0; 1\}$

q) On reprend la factorisation de [9]
$f(x) = (x-2)(3x-1)(2x+3)$
d'où $f(x) = 0 \Leftrightarrow x-2=0$ ou $3x-1=0$ ou $2x+3=0$
$x=2$ $\quad x=1/3$ $\quad x=-3/2$
$S = \{-3/2; 1/3; 2\}$

11] a) $\frac{x}{3} - 5 < +3x - \frac{1}{2}$ ↓ dén. commun
$\Leftrightarrow \frac{2x-30}{6} < \frac{+18x-3}{6}$ ↓ $\cdot 6$
$\Leftrightarrow 2x-30 < +18x-3$ ↓ $-18x+30$
$\Leftrightarrow -16x < 27$ ↓ $\div(-16)$
$\Leftrightarrow x > -\frac{27}{16}$
$S = \left]-\frac{27}{16}; +\infty\right[$

b) on reprend la factorisation de [9] et les zéros de [10] q)
$f(x) = (x-2)(3x-1)(2x+3)$
$Z_f = \{-3/2; 1/3; 2\}$

x		$-3/2$		$1/3$		2	
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$3x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$2x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

$S = \left[-3/2; 1/3\right] \cup \left[2; +\infty\right[$

c) $\frac{3x^2-19}{x^2-2x-3} \geq 4$ zéros de $x^2-2x-3 = (x-3)(x+1)$
$S = \{-1; 3\}$
donc $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 3\}$ (domaine de l'inéquation)

$\Leftrightarrow \frac{3x^2-19}{x^2-2x-3} - 4 \geq 0$
$\Leftrightarrow \frac{3x^2-19-4(x^2-2x-3)}{x^2-2x-3} \geq 0$
$\Leftrightarrow \frac{3x^2-19-4x^2+8x+12}{x^2-2x-3} \geq 0$
$\Leftrightarrow \frac{-x^2+8x-7}{x^2-2x-3} \geq 0$
$-(x-7)(x-1)$

x		-1		1		7		3	
$-x^2+8x-7$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$	$-$
x^2-2x-3	$+$	0	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
	$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$-$

$S = \left]-1; 1\right] \cup \left[7; 3\right[$

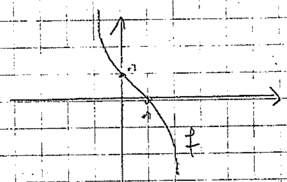
12) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{\sqrt{1-x^3}}{-x^2-12x-32}$

pb si $-x^2-12x-32=0 \iff -(x^2+12x+32)=0$
$\iff -(x+4)(x+8)=0$
$x=-4$ ou $x=-8$

pb si $1-x^3<0 \iff (1-x)(x^2+x+1)<0$

x		1	
$1-x$	$+$	0	$-$
x^2+x+1	$+$	$+$	$+$
$(1-x)(x^2+x+1)$	$+$	0	$-$

ou



donc pb si $x>1$

$D_f =]-\infty;1] \setminus \{-8;-4\} =]-\infty;-8[\cup]-8;-4[\cup]-4;1]$

13) f affine $\iff f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax$ $(a \in \mathbb{R})$ [courbe représentative = droite passant par origine]

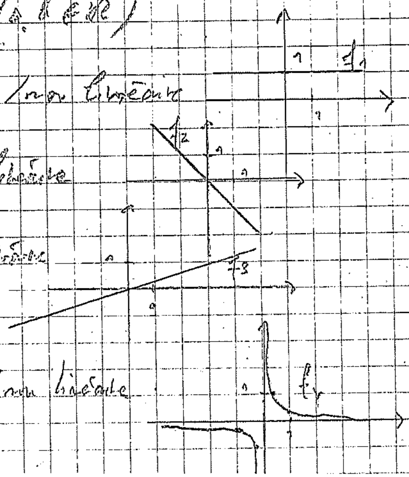
f linéaire $\iff f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto ax+b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ [courbe repr. = droite]

a) $f_1(x) = 0 \cdot x + 1$: affine / non linéaire

b) $f_2(x) = (-1)x + 0$: affine / linéaire

c) $f_3(x) = \frac{1}{3}x + 0$: affine / linéaire

d) $f_4(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x}$: non affine / non linéaire



14) a) $f(-2)=2$

b) $Z_f = \{-3;4\}$

c) o.o. de $f = 2$

d) $f^{-1}(1) = \{-2,5;-1,3\}$

e) par exemple $y=1,5$

f)

x		-3		4	
$f(x)$	$-$		$+$		$-$

g) $[-3;4]$

h) $[-4;-3[\cup]4;5]$ ou $]-\infty;-3[\cup]4;+\infty[$

i) $[0;2] \cup \{-2\}$

15] (a) Pour f : pente $= \frac{4-(-1)}{2-(-4)} = \frac{5}{6}$

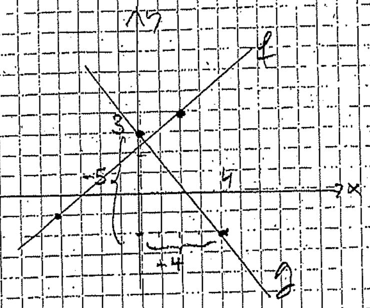
éq. de f : $y = \frac{5}{6}x + b$

$(2;4) \in f \Leftrightarrow 4 = \frac{5}{6} \cdot 2 + b$

$\Leftrightarrow b = 4 - \frac{5}{3} = \frac{12-5}{3} = \frac{7}{3}$

éq. de f : $y = \frac{5}{6}x + \frac{7}{3}$

(b)



(c) $g(x) = 0 \Leftrightarrow 3 - \frac{5}{4}x = 0 \quad) + \frac{5}{4}x$

$\Leftrightarrow 3 = \frac{5}{4}x \quad) \cdot 4$

$\Leftrightarrow 12 = 5x \quad) : 5$

$\Leftrightarrow \frac{12}{5} = x$

$Z_g = \{\frac{12}{5}\}$

(d) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{5}{6}x + \frac{7}{3} = 3 - \frac{5}{4}x \quad) + \frac{5}{4}x - \frac{7}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{5}{6}x + \frac{5}{4}x = 3 - \frac{7}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{10x + 15x}{12} = \frac{9-7}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{25x}{12} = \frac{2}{3} \quad) \cdot \frac{12}{25}$

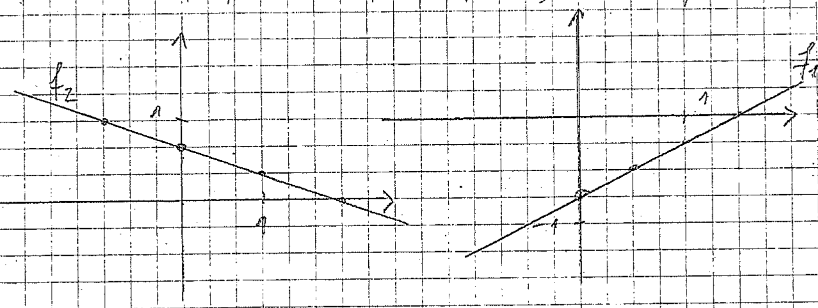
$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3} \cdot \frac{12}{25} = \frac{24}{75} = 0{,}32$

puis $y = \frac{5}{6} \cdot \frac{24}{75} + \frac{7}{3}$

$= \frac{4}{15} + \frac{7}{3} = \frac{4+35}{15} = \frac{39}{15}$

$= 2{,}6 \quad I = (0{,}32 ; 2{,}6)$

16] a) $f_1(x) = \frac{2x}{4} - \frac{3}{4} = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} \Rightarrow p = \frac{1}{2}$; o.o $= -\frac{3}{4}$



b) $f_2(x) = \frac{2}{3} - \frac{x}{3} = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \Rightarrow p = -\frac{1}{3}$; o.o $= \frac{2}{3}$

17] a) $y = 4x + b \qquad (3;2) \in \Gamma \Leftrightarrow 2 = 4 \cdot 3 + b \Leftrightarrow b = -10$

gamma majuscule représente la courbe représentative d'une fonction

$[y = 4x - 10]$

b) pente $= -1$ (car parallèle à droite d'équation $y = (-1)x + 7$)
pente

$(-6;8) \in \Gamma \Leftrightarrow 8 = (-1)(-6) + b$

$\Leftrightarrow b = 2 \qquad [y = -x + 2]$

c) pente entre les 2 points : $p = \frac{6-5}{5-(-9)} = \frac{1}{14} \Rightarrow y = \frac{1}{14}x + b$

$(5;6) \in \Gamma \Leftrightarrow 6 = \frac{1}{14} \cdot 5 + b$

$\Leftrightarrow b = 6 - \frac{5}{14} = \frac{79}{14} \qquad [y = \frac{1}{14}x + \frac{79}{14}]$

d) éq. de d' : $y = 3x - 4 \Rightarrow$ pente de $d' = 3 \Rightarrow$ pente de $d = -\frac{1}{3}$
(car $d \perp d'$)

d : $y = -\frac{1}{3}x + b$

$Z_f = \{2\} \Leftrightarrow f(2) = 0 \Leftrightarrow 0 = -\frac{1}{3} \cdot 2 + b \Leftrightarrow b = \frac{2}{3}$

$[y = -\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}]$

e) $y = -\frac{1}{2}x + b$ et $(\frac{1}{2}; -2) \in \Gamma$

$\Rightarrow -2 = -\frac{1}{2}(\frac{1}{2}) + b \Leftrightarrow b = -2 + \frac{1}{4} = -\frac{7}{4}$

$[y = -\frac{1}{2}x - \frac{7}{4}]$

19] $f(x) = -x^2 + 2x + 3 = -(x^2 - 2x - 3) = -(x-3)(x+1)$

O.O : $f(0) = 3$

Z_f : $f(x) = 0 \Leftrightarrow -(x-3)(x+1) = 0$

$x - 3 = 0$ ou $x + 1 = 0$ $\qquad Z_f = \{-1; 3\}$

$x = 3 \qquad x = -1$

axe : $x = -\frac{b}{2a} = \frac{-2}{-2} = 1$

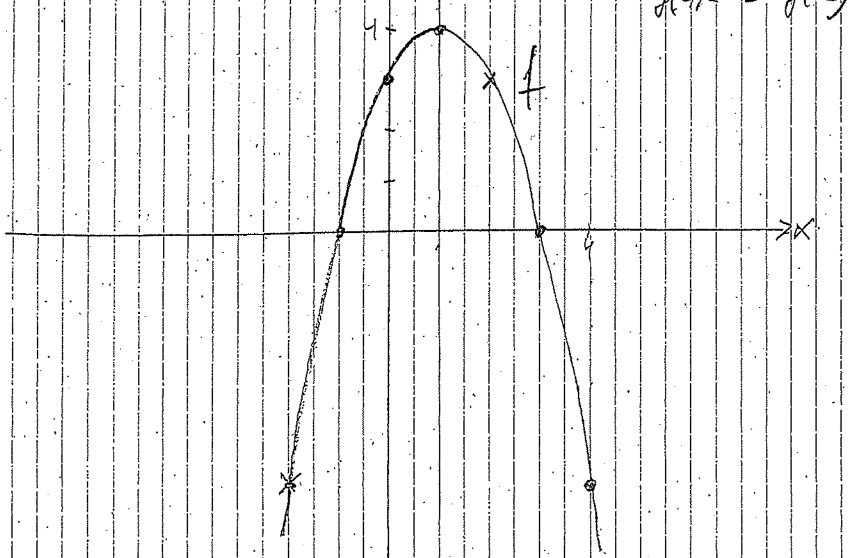
sommet $S = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ ou $S = \left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

$= (+1; f(1)) = (1; 4)$

$y = f(x)$

$f(2) = f(0) = 3$

$f(4) = -5 = f(-2)$



20] $f(x) = 2x^4 - 6x^3 - 12x^2 + 12x + 16$

a) $f(-1) = \dots = 0$ et $f(4) = 0$

donc $f(x)$ est divisible par $(x+1)\cdot(x-4) = x^2 - 3x - 4$

b)
$$
\begin{array}{r|l}
2x^4 - 6x^3 - 12x^2 + 12x + 16 & x^2 - 3x - 4 \\
\hline
-\quad 2x^4 - 6x^3 - 8x^2 & 2x^2 - 4 \\
\hline
-4x^2 + 12x + 16 & \\
-\quad -4x^2 + 12x + 16 & \\
\hline
0 &
\end{array}
$$

donc $f(x) = (x^2 - 3x - 4)(2x^2 - 4)$

$= (x+1)(x-4)\,2(x^2 - 2)$

c) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0$ ou $x - 4 = 0$ ou $x^2 - 2 = 0$

$x = -1 \qquad x = 4 \qquad x = \pm\sqrt{2}$

$Z_f = \{-\sqrt{2}; -1; \sqrt{2}; 4\}$

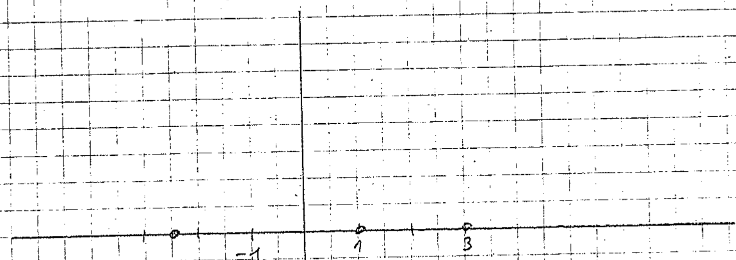
21] $f(x) = -\frac{1}{5}(x-3)^2(1-x)(2x+5) \Rightarrow \dots \Rightarrow Z_f = \{-\frac{5}{2}; 1; 3\}$

a)

x		$-5/2$		1		3	
$-1/5$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$
$(x-3)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$+$
$1-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$2x+5$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$

b) $S =]-\infty; -5/2[\cup]1; 3[\cup]3; +\infty[$

c)



24] • $\{-2; 2; 5\} = Z_f$

• -2 et 5 marquent un changement de signe de $f(x)$, donc $(x+2)$ et $(x-5)$ sont des facteurs de puissances impaires

• 2 ne marque pas de changement de signe $\Rightarrow$ $(x-2)$ puissance paire $\rightarrow (x-2)^2$ car on cherche le plus petit degré possible

donc $f(x) = a \cdot (x+2)(x-5)(x-2)^2$

reste à trouver a...

• $f(0) = 2 \Leftrightarrow 2 = a \cdot (0+2)(0-5)(0-2)^2$
$\Leftrightarrow 2 = a \cdot (-40)$
$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{20}$

Conclusion : $f(x) = -\frac{1}{20}(x+2)(x-5)(x-2)^2$

22] $\begin{cases} ① \ (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5 \\ ② \ -x+4y-4=0 \end{cases}$

② : $x = 4y-4$

dans ① : $((4y-4)-2)^2 + (y-1)^2 = 5$
$\Leftrightarrow (4y-6)^2 + (y-1)^2 = 5$
$\Leftrightarrow 16y^2 - 48y + 36 + y^2 - 2y + 1 = 5$
$\Leftrightarrow 17y^2 - 50y + 32 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = 324$

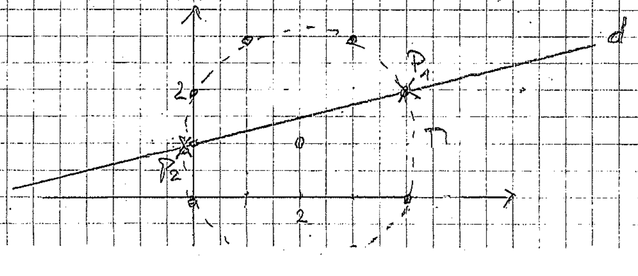
$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{50 \pm 18}{34}$ $\Rightarrow y_1 = 2$ $\Rightarrow y_2 = 32/34 = 16/17$

donc $x_1 = 4 \cdot 2 - 4 = 4$ $\quad P_1 = (4; 2)$

$x_2 = 4 \cdot \frac{16}{17} - 4 = -\frac{4}{17}$ $\quad P_2 = (-4/17; 16/17)$

② $y = \frac{1}{4}x + 1$

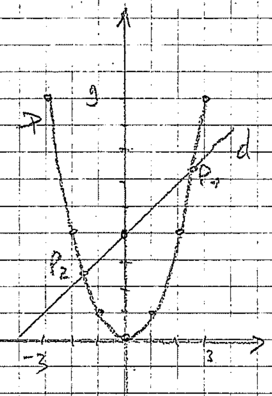
points de ①
(3;3) (1;3)
(4;2) (0;2)
(4;0) (0;0)



23] rayon $= \delta(O;B) = \sqrt{[2-(-3)]^2 + [-5-7]^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$

eq. de Γ : $(x-2)^2 + (y+5)^2 = 13^2$

25] a)



b) ce sont les pts d'intersection de la droite et de la parabole

c) $P_1 \cong (2{,}4; 6{,}5)$
$P_2 \cong (-1{,}6; 2{,}5)$

donc $S \cong]-1{,}6; 2{,}4[$

d) $x + 4 > x^2$
$\Leftrightarrow 0 > x^2 - x - 4$

$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4) = 17$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$

donc (degré 2 : ∪) :

$S =]\frac{1-\sqrt{17}}{2}; \frac{1+\sqrt{17}}{2}[$
$\cong]-1{,}56; 2{,}56[$

26] Léo x $\quad$ Kalé y

$3x - 2y = 4$
$\Leftrightarrow y = \frac{3}{2}x - 2$
$\Leftrightarrow x = \frac{2}{3}y + \frac{4}{3}$

a) $x = -8 \Rightarrow y = \frac{3}{2}(-8) - 2 = -14$

b) $f : x \mapsto y = \frac{3}{2}x - 2$

c) $g : y \mapsto x = \frac{2}{3}y + \frac{4}{3}$

d) $f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\frac{2}{3}x + \frac{4}{3})$
$= \frac{3}{2}(\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}) - 2$
$= x + 2 - 2 = x$

e) f est la réciproque de g
et g " " " f

car $f \circ g(x) = x$
et $g \circ f(x) = \ldots = x$

27] a) $f(g(x)) = f\left(\frac{-x+4}{3x}\right) = \frac{4}{3\left(\frac{-x+4}{3x}\right)+1} = \frac{4}{\frac{-x+4+x}{x}} = \frac{4}{\frac{4}{x}} = 4\cdot\frac{x}{4} = x$

b) $x \xrightarrow{\cdot 3} 3x \xrightarrow{+1} 3x+1 \xrightarrow{\frac{1}{\cdots}} \frac{1}{3x+1} \xrightarrow{\cdot 4} 4\cdot\frac{1}{3x+1} = \frac{4}{3x+1}$

donc $f(x) = k \circ b \circ h \circ c(x)$

28] a) $\frac{-2x^2+4}{x^2-2x-3} \geq -4 \iff \frac{-2x^2+4}{x^2-2x-3} + 4 \geq 0$

$\iff \frac{-2x^2+4+4(x^2-2x-3)}{x^2-2x-3} \geq 0$

$\iff \frac{+2x^2-8x-8}{x^2-2x-3} \geq 0 \iff \frac{2(x^2-4x-4)}{x^2-2x-3} \geq 0$ $\quad | \div 2$

$\iff \frac{x^2-4x-4}{x^2-2x-3} \geq 0$

b) D : pb si $x^2-2x-3=0 \iff (x-3)(x+1)=0 \iff x=3$ ou $x=-1$

$D = \mathbb{R}\setminus\{-1;3\}$

signe de x^2-2x-3 :

signe de x^2-4x-4 : $\Delta = (-4)^2 - 4\cdot1\cdot(-4) = 32$

$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{32}}{2} = \frac{4 \pm 4\sqrt{2}}{2} = \frac{2(2 \pm 2\sqrt{2})}{2} = 2 \pm 2\sqrt{2}$

$x_1 \approx -0{,}8$

$x_2 \approx 4{,}8$

$2-2\sqrt{2}$ $\quad$ $2+2\sqrt{2}$

d'où le t/s :

x		$2-2\sqrt{2}$		-1		3		$2+2\sqrt{2}$	
x^2-4x-4	+	0	−	−	−	−	−	0	+
x^2-2x-3	+	+	+	0	−	0	+	+	+
$\frac{x^2-4x-4}{x^2-2x-3}$	+	0	−	//	+	//	−	0	+

$S = \left]-\infty; 2-2\sqrt{2}\right] \cup \left]-1; 3\right[\cup \left[2+2\sqrt{2}; +\infty\right[$

c) $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-1;3\}$ (cf b))

Z_f : $-2x^2+4=0 \iff x^2=2 \iff x=\pm\sqrt{2}$ $\quad Z_f = \{\pm\sqrt{2}\}$

$f(0) = -\frac{4}{3}$

d) $f(x) = \frac{-2(x^2-2)}{(x-3)(x+1)}$

as. verticales : $x=3$ et $x=-1$

$f(x) = \frac{\cancel{x^2}(-2+4/x^2)}{\cancel{x^2}(1-2/x-3/x^2)}$

as. horizontale $y = \frac{-2}{1} = -2$

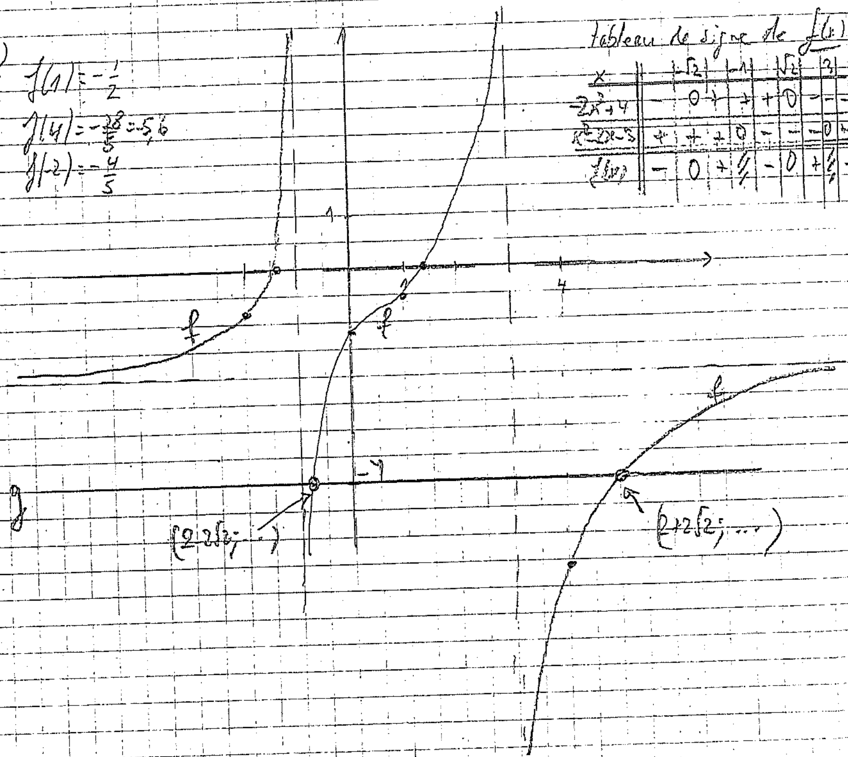
Tableau de signe de $f(x)$

x		$-\sqrt{2}$		-1		$\sqrt{2}$		3	
$-2x^2+4$	−	0	+	+	+	0	−	−	−
x^2-2x-3	+	+	+	0	−	−	−	0	+
$f(x)$	−	0	+	//	−	0	+	//	−

e) $f(1) = -\frac{1}{2}$

$f(4) = -\frac{28}{5} = -5{,}6$

$f(-2) = -\frac{4}{5}$



f) C'est correct, l'inéquation algébrique $f(x) \geq g(x)$ s'interprète graphiquement comme : "tous les x pour lesquels l'image $f(x)$ est "au dessus" de l'image $g(x)$", càd les x pour lesquels la courbe repr. de f est "au-dessus" de celle de g

29] x, y les 2 nombres

$$\begin{cases} x+y=1 & (1) \\ x^2+y^2=2 & (2) \end{cases}$$

$(1) \Leftrightarrow y = 1-x$ dans (2) : $x^2+(1-x)^2=2$

$\Leftrightarrow x^2+1-2x+x^2=2$

$\Leftrightarrow 2x^2-2x-1=0$

$\Delta = (-2)^2-4\cdot 2(-1)=12$

$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{12}}{4} = \frac{2 \pm 2\sqrt{3}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$

A : $x = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = 1-\frac{1-\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

B : $x = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y = 1-\frac{1+\sqrt{3}}{2} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$

Il y a donc une seule solution pour les 2 nbres : $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

30] x et y les 2 prix d'achat

$$\begin{cases} (x+y)\cdot(1+0{,}05) = 210 \\ x(1+0{,}1)+y(1-0{,}1)=210 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1{,}05x+1{,}05y=210 & (1) \quad \cdot 1{,}1 \\ 1{,}1x+0{,}9y=210 & (2) \quad \cdot(-1{,}05) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1{,}155x+1{,}155y=231 \\ -1{,}155x-0{,}945y=-220{,}5 \end{cases}$$

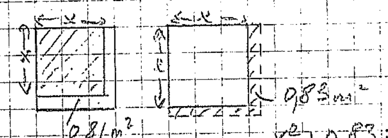
$+$: $0{,}21y = 10{,}5$

$y = 50$

dans (1) : $x = \frac{210-1{,}05\cdot y}{1{,}05} = \frac{210}{1{,}05}-y = 150$

Les prix initiaux sont 50 et 150

31] x : côté de la pièce
y = côté du carreau



$0{,}81\,m^2$ $\qquad$ $0{,}83\,m^2$

$(20y)^2+0{,}81=x^2 \qquad x^2+0{,}83=(21y)^2$

$$\begin{cases} 400y^2+0{,}81=x^2 & (1) \\ 441y^2-0{,}83=x^2 & (2) \end{cases} \Rightarrow 400y^2+0{,}81=441y^2-0{,}83$$

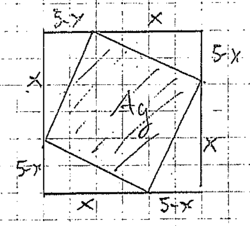
$41y^2 = 1{,}64$

$y^2 = \pm 0{,}04$

$y_0 = \pm 0{,}2$ (on garde $y = 0{,}2$ m)

$\sqrt{x^2 = 400(0{,}2)^2+0{,}81}$

32] a)

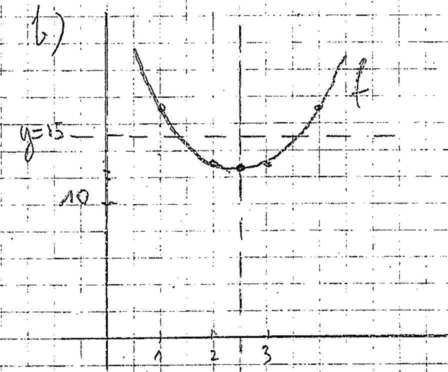


$A_g = 5^2 - 4\cdot\frac{x(5-x)}{2} = 25-2x(5-x)$

$= 2x^2-10x+25$

$(f(x) = 2x^2-10x+25)$

b)



zeros : $\Delta = (-10)^2-4\cdot 2\cdot 25 < 0$ $\quad Z=\emptyset$

$f(0)=25$

axe : $x = -\frac{b}{2a} = \frac{10}{4} = 2{,}5$

Sommet : $f(2{,}5) = 12{,}5$
$S = (2{,}5 ; 12{,}5)$

$f(2) = 13 = f(3)$

$f(1) = 17 = f(4)$

c) minimum atteint pour $x = 2{,}5$ cm ; il vaut $12{,}5\ cm^2$

d) $D_{f} = [0;5]$

$f(0) = f(5) = 25$, donc max atteint pour $x = 0$ cm (ou 5 cm) qui vaut $25\ cm^2$ (tout le carré initial !)

e) cf c) et d)

f) $2x^2-10x+25=15$

$\Leftrightarrow 2x^2-10x+10=0$

$\Leftrightarrow x^2-5x+5=0$

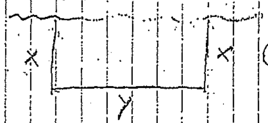
$\Delta = 25-4\cdot 1\cdot 5 = 5$

$x_{1,2} = \frac{+5 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{5-\sqrt{5}}{2} \simeq 1{,}4$ cm

$\rightarrow x_2 = \frac{5+\sqrt{5}}{2} \simeq 3{,}6$ cm

g) ce sont les 2 valeurs de x pour lesquelles la courbe représentative de f intersecte la droite horizontale d'équation $y = 15$

33]



(a) $P = 2x + y = 300$
$\Leftrightarrow y = 300 - 2x$
$0 < x < 150 \Rightarrow D_{ripp} =]0;150[$

(b) $A(x) = x \cdot (300 - 2x) = -2x^2 + 300x$

(c) Sommet $S = \left(-\frac{b}{2a} ; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ ou $S = \left(-\frac{b}{2a} ; -\frac{\Delta}{4a}\right)$

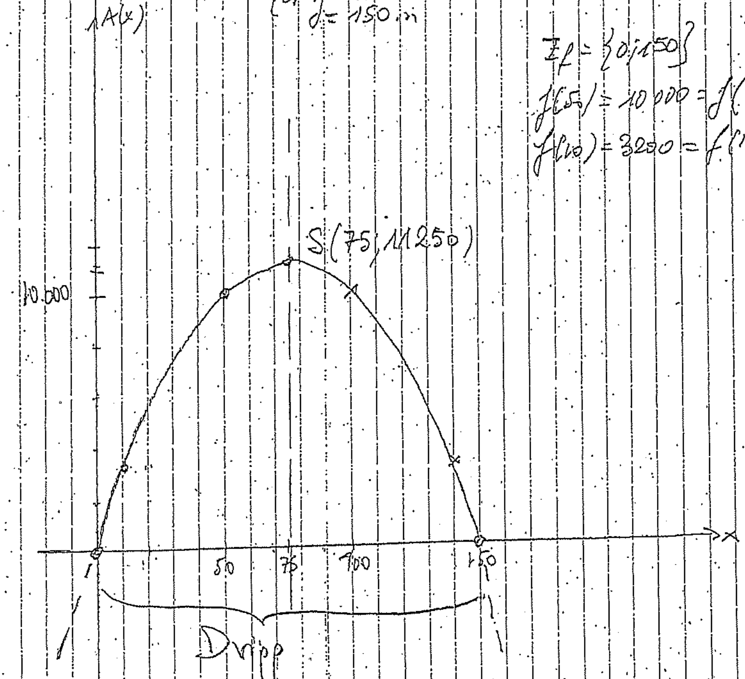
$= \left(\frac{-300}{-4} ; \ldots\right)$

$= (75 ; f(75)) = (75 ; -2 \cdot 75^2 + 300 \cdot 75) = (75 ; 11250)$

l'aire est maximale pour $x = 75$ m ; elle vaut alors 11250 m²
(et $y = 300 - 2 \cdot 75$
$y = 150$ m)

(d)

$I_f =]0;150[$
$f(50) = 10\,000 = f(100)$
$f(10) = 3280 = f(140)$



34) a) $P_{AB} = \frac{4-2}{-\frac{5}{4} - (-4)} = \frac{2}{\frac{-5+16}{4}} = \frac{2}{\frac{11}{4}} = 2 \cdot \frac{4}{11} = \frac{8}{11}$

$P_{BC} = \frac{1-2}{0 - (-\frac{5}{4})} = \frac{-1}{\frac{5}{4}} = -\frac{4}{5}$

non ils ne sont pas alignés car ces 2 pentes sont différentes

b) éq. parabole : $y = ax^2 + bx + c$

$(-4;4) \in$ par. $\Leftrightarrow 4 = a(-4)^2 + b(-4) + c$ ①
$(-\frac{5}{4};2) \in$ par. $\Leftrightarrow 2 = a(-\frac{5}{4})^2 + b(-\frac{5}{4}) + c$ ②
$(0;1) \in$ par $\Leftrightarrow 1 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$ ③

③ : $c = 1 \Rightarrow y = ax^2 + bx + 1$

$\begin{cases} 4 = 16a - 4b + 1 \\ 2 = \frac{25}{16}a - \frac{5b}{4} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow 32 = 25a - 20b + 16$

$\Leftrightarrow$ ① $\begin{cases} 16a - 4b = 3 \\ 25a - 20b = 16 \end{cases}$ ② $\Big| \cdot (-5)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -80a + 20b = -15 \\ 25a - 20b = 16 \end{cases}$

$-55a = 1$
$a = -\frac{1}{55}$

dans ① : $16\left(-\frac{1}{55}\right) - 4b = 3$
$\Leftrightarrow 4b = -\frac{16}{55} - 3$
$\Leftrightarrow 4b = -\frac{181}{55} \Leftrightarrow b = -\frac{181}{220}$

La parabole est d'équation $y = -\frac{1}{55}x^2 - \frac{181}{220}x + 1$

Rem : on peut vérifier que

$4 \stackrel{?}{=} -\frac{1}{55}(-4)^2 - \frac{181}{220}(-4) + 1$ ✓

$2 \stackrel{?}{=} -\frac{1}{55}\left(-\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{181}{220}\left(-\frac{5}{4}\right) + 1$ ✓