Résumé 2 : Ensembles numériques

1. Les ensembles

- $a \in A$ signifie « a appartient à A » ou « a est un élément de A »
- $a \notin A$ signifie « a n'appartient pas à A » ou « a n'est pas un élément de A »
- $A \cup B$ est l'ensemble des éléments qui sont dans A ou dans B (ou non exclusif), c'est-à-dire $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$; $A \cup B$ se lit « A union B ».
- $A \cap B$ est l'ensemble des éléments qui sont dans A et dans B, c'est-à-dire $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$; $A \cap B$ se lit « A inter B » ou « A intersection B ».
- $A \backslash B$ est l'ensemble des éléments qui sont dans A et pas dans B, c'est-à-dire $A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$; $A \backslash B$ se lit « A diff B ».
- $A \subseteq B$ signifie que tout élément de A est aussi dans B, c'est-à-dire $A \subseteq B \Leftrightarrow$ si $x \in A$, alors $a \in B$; $A \subseteq B$ se lit « A est inclus dans B ».
- A^* est l'ensemble des éléments de A sans le zéro.
- A^+ est l'ensemble de tous les éléments positifs (à comprendre comme « positifs ou nuls ») de A.
- A^- est l'ensemble de tous les éléments négatifs (à comprendre comme « négatifs ou nuls ») de A.

2. L'ensemble $\mathbb{N}$

- L'ensemble des **entiers naturels** est l'ensemble infini des nombres entiers : $\mathbb{N} = \{ 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; \dots \}$.
- On peut ensuite **définir** deux opérations dans cet ensemble, l'addition et la multiplication, de telle sorte que pour tout couple de nombres de cet ensemble,

chacune de ces opérations donne un et un seul résultat.

L'addition est notée "a + b" et la multiplication "a·b" (ou simplement "ab").

On peut alors **démontrer** que $\mathbb{N}$ contient une infininité d'éléments – qu'on appellera les nombres entiers naturels - et que ces opérations jouissent des propriétés suivantes : elles possèdent chacune un **élément neutre** (0 pour l'addition et 1 pour la multiplication), elles sont **commutatives** et **associatives**, et la multiplication est **distributive** par rapport à l'addition :

$a + 0 = a = 0 + a$	$a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$	éléments neutres
$a + b = b + a$	$a+b = b+a$	commutativité
$(a + b) + c = a + (b+c)$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	associativité
$(a + b) \cdot c = a \cdot (b+c)$		distributivité

- S'il est vrai qu'à tout couple de nombres naturels chacune de ces deux opérations (addition et multiplication) fait correspondre un et un seul résultat, certaines équations, par contre, n'ont pas de solution dans l'ensemble $\mathbb{N}$, par exemple l'équation $x + 3 = 2$

  La construction des autres ensembles numériques a pour but de remédier à cette absence de solution à des équations simples. Il faut donc élargir l'ensemble $\mathbb{N}$, mais en conservant si possible les opérations existant dans $\mathbb{N}$, ainsi que leurs propriétés.

3. L'ensemble $\mathbb{Z}$

- On peut alors construire l'ensemble des **entiers relatifs**

$$\mathbb{Z} = \{\ldots ; -4 ; -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; \ldots\}$$

qui est essentiellement composé de "deux copies" de $\mathbb{N}$.

On montre alors qu'ainsi
- Z est infini
- chaque élément "a" de $\mathbb{Z}$ possède (dans $\mathbb{Z}$) un opposé, noté "-a", tel que $a + (-a) = 0$
- un entier relatif est égal à l'opposé de son opposé, càd : $-(-a) = a$
- les opérations d'addition et de multiplication jouissent des mêmes propriétés que dans $\mathbb{N}$

- Ainsi chaque équation du type a + x = b possède une solution unique dans $\mathbb{Z}$. En effet, en utilisant uniquement les propriétés connues dans $\mathbb{Z}$, on peut résoudre ce type d'équation:

	$a + x = b$	
$\Leftrightarrow$	$(a + x) + (-a) = b + (-a)$	existence d'un opposé
$\Leftrightarrow$	$(-a) + (a + x) = b + (-a)$	commutativité
$\Leftrightarrow$	$((-a) + a) + x = b + (-a)$	associativité
$\Leftrightarrow$	$0 + x = b + (-a)$	définition de l'opposé
$\Leftrightarrow$	$x = b + (-a)$	définition du neutre

La solution est unique car le nombre b + (-a) est unique.

- Remarque : on définit $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} \setminus\{0\}$, càd l'ensemble des entiers relatifs différents de zéro.
  Cette notation est souvent utilisée: plus généralement, si A est un ensemble numérique, alors $A^* = A\setminus\{0\}$.

- Mais, dans l'ensemble $\mathbb{Z}$, certaines équations n'ont toujours pas de solution, par exemple l'équation $6\cdot x = 15$ ...

  Il faut donc à nouveau élargir l'ensemble $\mathbb{Z}$ ...

4. L'ensemble $\mathbb{Q}$

- Les **fractions** : $\{ \frac{a}{b}$ avec $a\in \mathbb{Z}$ et $b\in \mathbb{Z}^*\}$

- Définition de l'**égalité de deux fractions** : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a\cdot d = b\cdot c$

- L'ensemble des **nombres rationnels**, est défini ainsi :

  $\mathbb{Q}$ = {x | le développement décimal de x est soit fini, soit infini périodique à partir d'un certain rang}

- On démontre qu'à tout nombre rationnel correspond une unique fraction irréductible, et qu'à toute fraction irréductible correspond un unique nombre rationnel.
  Ceci permet de parler indistinctement de nombres rationnels ou de fraction.

- L'addition et la multiplication sont définies dans $\mathbb{Q}$ à partir des définitions de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{Z}$, de la façon suivante:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd} \qquad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

- On peut vérifier que ces opérations sont commutatives et associatives, qu'elles possèdent un neutre ($\frac{0}{1} = 0$ et $\frac{1}{1} = 1$) et que la multiplication est distributive pour l'addition.

- Chaque élément $\frac{a}{b}$ de $\mathbb{Q}$ possède un symétrique pour chacune de ces opérations (sauf $0 = \frac{0}{1}$ qui n'a pas d'inverse) :

    - pour l'addition, on le note $-\frac{a}{b}$ et on l'appelle "opposé" ;

      il est défini par $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$

    - pour la multiplication, on le note $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}$ et on l'appelle "inverse";

      il est défini par $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$

- Toute équation du type Ax = B (avec A et B dans $\mathbb{Q}$ et $A \neq 0$) possède une solution unique dans $\mathbb{Q}$, en effet :

	$A \cdot x = B$	
$\Leftrightarrow$	$(A \cdot x) \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$	existence d'un inverse ($A \neq 0$)
$\Leftrightarrow$	$(x \cdot A) \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$	commutativité
$\Leftrightarrow$	$\cdot(A \cdot A^{-1}) = B \cdot A^{-1}$	associativité
$\Leftrightarrow$	$\cdot 1 = B \cdot A^{-1}$	définition de l'inverse
$\Leftrightarrow$	$= B \cdot A^{-1}$	définition du neutre

- Mais les pythagoriciens prouvèrent le

  Théorème

  La longueur de la diagonale d'un carré de côté 1 n'est pas un nombre rationnel

  Démonstration à connaître (cf cours)

  Il existe donc d'autres nombres que les nombres rationnels ...

5. L'ensemble $\mathbb{R}$

- Il est extrêmement difficile de définir précisément ce qu'est un nombre réel, et plus encore ce qu'est l'ensemble des nombres réels. Ce n'est d'ailleurs qu'à la fin du XIXème siècle que des mathématiciens comme Cauchy, Dedekind et d'autres ont pu formellement les définir.
« En mathématiques, les nombres réels peuvent très informellement être conçus comme tous les nombres associés à des longueurs ou des grandeurs physiques. Ce sont les nombres, qu'ils soient positifs, négatifs ou nuls, ayant une représentation décimale finie ou infinie. Autrement dit, ce sont les rationnels (qui peuvent s'écrire sous forme de fraction) complétés par les nombres dont la représentation décimale est infinie non périodique[1], tels la racine carrée de 2 et π »
Source : http://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_r%C3%A9el, le 15 août 2008

- On se contentera donc d'en avoir une appréhension intuitive : les nombres qui mesurent une longueur quelconque sur une droite réelle, auquels on ajoute un signe positif ou négatif.

- Les réels n'appartenant pas à $\mathbb{Q}$ sont appelés **irrationnels**: ils ne peuvent pas se mettre sous la forme d'une fraction d'entiers relatifs et leur écriture décimale est sans période.

- Exemples : $\sqrt{2} = 1{,}414\ldots\ldots$ $\Pi = 3{,}14159\ldots\ldots$
$1{,}0102030405060708090100110120\ldots\ldots$ $0{,}1011011101111011111011111110\ldots\ldots$

- **$\mathbb{R}$ est la base sur laquelle repose toute la construction du calcul des dérivées et des intégrales, principaux sujets du cours de cette année.**

- $\mathbb{Q}$ est l'ensemble numérique dans lequel nous travaillons habituellement avec nos calculatrices, car nous utilisons alors des approximations rationnelles des nombres réels. On peut en effet montrer que tout nombre réel peut être approché d'aussi près qu'on veut par des nombres rationnels.

6. Nombre rationnels et irrationnels : un étrange mélange…

- Théorèmes

a) Il y a une infinité de nombres rationnels
b) Il y a une infinité de nombres irrationnels
c) Le produit et la somme d'un rationnel et d'un irrationnel sont irrationnels

d) Le produit et la somme de deux irrationnels peuvent être aussi bien rationnels qu'irrationnels.

e) Entre deux rationnels, il y a au moins un rationnel et au moins un irrationnel.

f) Entre deux irrationnels, il y a au moins deux rationnels.