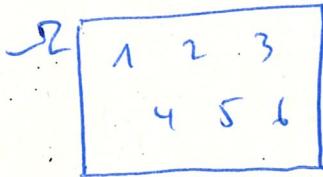


Théorèmes de probabilité

Théorème 1

Soit Ω un univers et p une probabilité sur Ω , alors on a $p(\emptyset) = 0$

Illustrer par un exemple concret :



jet d'un dé (non truqué) à 6 faces
 $A = \text{"obtenir un multiple de 7"} = \emptyset$

$$p(A) = 0$$

Démonstration :

Idée : on écrit $\Omega = \Omega \cup \emptyset$ (et on a $\Omega \cap \emptyset = \emptyset$)

d'où : $p(\Omega) = p(\Omega \cup \emptyset)$

$$= p(\Omega) + p(\emptyset), \text{ car [1 : } A \times 2, \text{ car } \Omega \cap \emptyset = \emptyset \text{]}]$$

c'est-à-dire : $p(\Omega) - p(\Omega) = p(\emptyset)$, car [2 : $-p(\Omega)$]

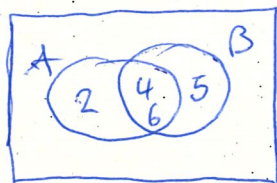
et enfin : $0 = p(\emptyset)$

cqfd

Théorème 2

Soit Ω un univers, p une probabilité sur Ω et A et B deux événements aléatoires quelconques de Ω , alors on a $p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B)$

Illustrer par un exemple concret :



on jette un dé non truqué à 6 faces
 $A = \text{obtenir un chiffre pair} = \{2; 4; 6\}$
 $B = \text{" " " } \geq 4 = \{4; 5; 6\}$

$$A \cap \bar{B} = \{2\}$$

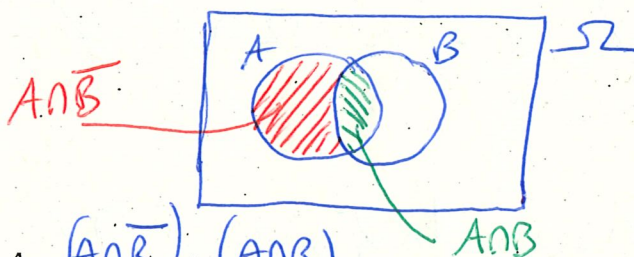
$$A \cap B = \{4; 6\}$$

$$p(A \cap \bar{B}) \stackrel{?}{=} p(A) - p(A \cap B)$$

$$\frac{1}{6} \stackrel{?}{=} \frac{3}{6} - \frac{2}{6} \quad \checkmark$$

Démonstration :

faire un schéma ensembliste ci-dessous dans lequel représenter Ω , A , B et $A \cap \bar{B}$



Idée : on écrit $A = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B)$

et on observe que $(A \cap \bar{B}) \cap (A \cap B) = \emptyset$

d'où : $p(A) = p(A \cap \bar{B}) + p(A \cap B)$, car [1 : $A \times 3$]

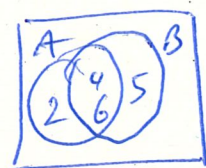
c'est-à-dire : $p(A \cap \bar{B}) = p(A) - p(A \cap B)$, car [2 : $-p(A \cap B)$]

cqfd

Théorème 3

Soit Ω un univers, p une probabilité sur Ω et A et B deux événements aléatoires quelconques de Ω , alors on a $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$

Illustrer par un exemple concret :



$$A = \{2, 4, 6\}$$

$$B = \{4, 5, 6\}$$

(comme thm 2)

on jette un dé à 6 faces, non truqué

$$A \cup B = \{2, 4, 5, 6\}$$

$$A \cap B = \{4, 6\}$$

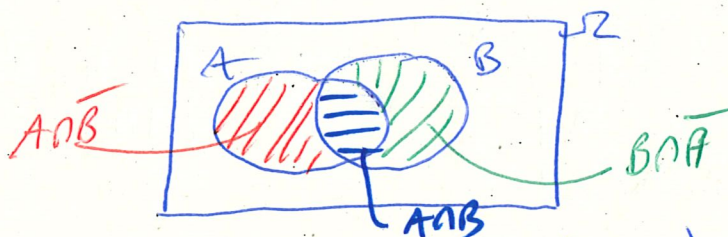
$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$\frac{4}{6} = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6}$$

✓

Démonstration :

faire un schéma ensembliste ci-dessous dans lequel représenter Ω , A , B et $A \cap \bar{B}$, $A \cap B$ et $B \cap \bar{A}$



Idée : on écrit $A \cup B = (A \cap \bar{B}) \cup (A \cap B) \cup (B \cap \bar{A})$

et on observe que $(A \cap \bar{B})$, $(A \cap B)$ et $(B \cap \bar{A})$ sont tous *déjà* disjoints

d'où : $p(A \cup B) = p(\underbrace{A \cap \bar{B}}_{A \setminus B}) + p(\underbrace{A \cap B}_{A \cap B}) + p(\underbrace{B \cap \bar{A}}_{B \setminus A})$, car [1 : *A \setminus B*]

$$= p(\underbrace{A}_{A \cup B}) - p(\underbrace{A \cap B}_{A \cap B}) + p(\underbrace{A \cap B}_{A \cap B}) + p(\underbrace{B}_{A \cup B}) - p(\underbrace{B \cap A}_{A \cap B}), \text{ car [2 : *Thm 2*]}]$$

$$= p(\underbrace{A}_{A}) + p(\underbrace{B}_{B}) - p(\underbrace{A \cap B}_{A \cap B})$$

(car $A \cap B = B \cap A$)

cqfd

Théorème 4

Soit Ω un univers, p une probabilité sur Ω et A un événement aléatoire quelconque de Ω , alors on a $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$

Illustrer par un exemple concret : on jette un dé non truqué à 6 faces

$A =$ obtenir un chiffre pair $= \{2, 4, 6\}$

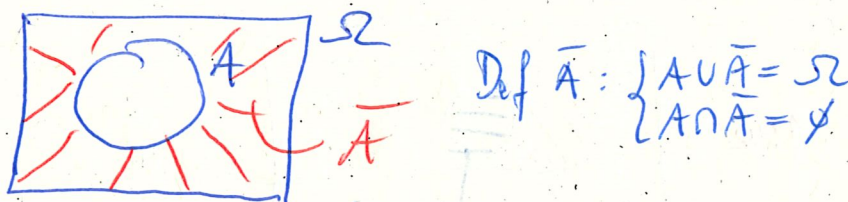
$\bar{A} =$ " " " " impair $= \{1, 3, 5\}$

$$p(\bar{A}) \stackrel{?}{=} 1 - p(A)$$

$$\frac{3}{6} \stackrel{?}{=} 1 - \frac{3}{6} \quad \checkmark$$

Démonstration :

faire un schéma ensembliste ci-dessous dans lequel représenter Ω , A et $\bar{A}$



Idée : on a $A \cup \bar{A} = \Omega$ et $A \cap \bar{A} = \emptyset$

d'où : $p(A \cup \bar{A}) = p(\Omega)$, car [1 : def $\bar{A}$]

$$\Leftrightarrow p(A) + p(\bar{A}) = p(\Omega), \text{ car [2 : Ax 2] } \dots$$

$$\Leftrightarrow p(A) + p(\bar{A}) = 1, \text{ car [3 : Ax 2] } \dots$$

$$\Leftrightarrow p(\bar{A}) = 1 - p(A), \text{ car [4 : - p(A)] } \dots$$

cqfd