

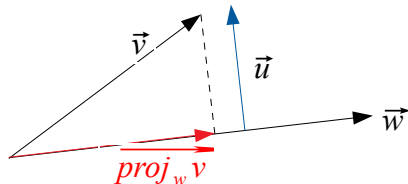
Théorème « Vecteur projection » (dans le plan)

Soient \vec{v} et \vec{w} deux vecteurs non nuls du plan. Alors on a:

a) le vecteur projection (orthogonale) de \vec{v} sur \vec{w} est $\overrightarrow{proj_w v} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{w}\|^2} \cdot \vec{w}$

b) $\|\overrightarrow{proj_w v}\| = \|\vec{v}\| |\cos(\alpha)|$, où α est l'angle entre \vec{v} et \vec{w}

Démonstration



a) $\overrightarrow{proj_w v} = \lambda \cdot \vec{w}$, car [ARG 1:]

mais aussi $\vec{v} \cdot \vec{w} = (\overrightarrow{proj_w v} + \vec{u}) \cdot \vec{w}$, car [ARG 2:]

$= \overrightarrow{proj_w v} \cdot \vec{w} + \vec{u} \cdot \vec{w}$, car [ARG 3:]

$= \overrightarrow{proj_w v} \cdot \vec{w} + \vec{0}$, car [ARG 4:]

$= (\lambda \cdot \vec{w}) \cdot \vec{w}$, car [ARG 5:]

$= \lambda \cdot (\vec{w} \cdot \vec{w})$, car [ARG 6:]

$= \lambda \cdot \|\vec{w}\|^2$, car [ARG 7:]

d'où : $\lambda = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{w}\|^2}$, car [ARG 8:]

on en déduit que : $\overrightarrow{proj_w v} = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{w}\|^2} \cdot \vec{w}$, car [ARG 9:]

b) $\|\overrightarrow{proj_w v}\| = \left\| \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{w}\|^2} \cdot \vec{w} \right\|$, car [ARG 10:]

$= \left| \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{w}\|^2} \right| \cdot \|\vec{w}\|$, car [ARG 11:]

$= \frac{|\vec{v} \cdot \vec{w}|}{\|\vec{w}\|^2} \cdot \|\vec{w}\|$, car [ARG 12:]

$= \frac{|\vec{v} \cdot \vec{w}|}{\|\vec{w}\|}$, car [ARG 13:]

$= \frac{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\| |\cos(\alpha)|}{\|\vec{w}\|}$, car [ARG 14:]

$= \|\vec{v}\| |\cos(\alpha)|$, car [ARG 15:]