ex 11 $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$

a) $\|\vec{v}\| = \sqrt{4^2+2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

b) $\|\vec{w}\| = \sqrt{(-2)^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

c) $\vec{v}+\vec{w} = \begin{pmatrix}4+(-2)\\2+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$

d) $\vec{v}-\vec{w} = \begin{pmatrix}4-(-2)\\2-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$

e) $\vec{w}-\vec{v} = \begin{pmatrix}-2-4\\2-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6\\0\end{pmatrix}$

f) $2\vec{v} = 2\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot 4\\2\cdot 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$

g) $\|2\vec{v}\| = \left\|\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{8^2+4^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$

rem : $\|2\vec{v}\| = 2\cdot\|\vec{v}\|$!

h) $\|\vec{w}+\vec{v}\| = \left\|\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

rem $\|\vec{w}+\vec{v}\| \neq \|\vec{w}\| + \|\vec{v}\|$

i) $\|\vec{w}-\vec{v}\| = \left\|\begin{pmatrix}-6\\0\end{pmatrix}\right\| = \sqrt{6^2+0^2} = 6$

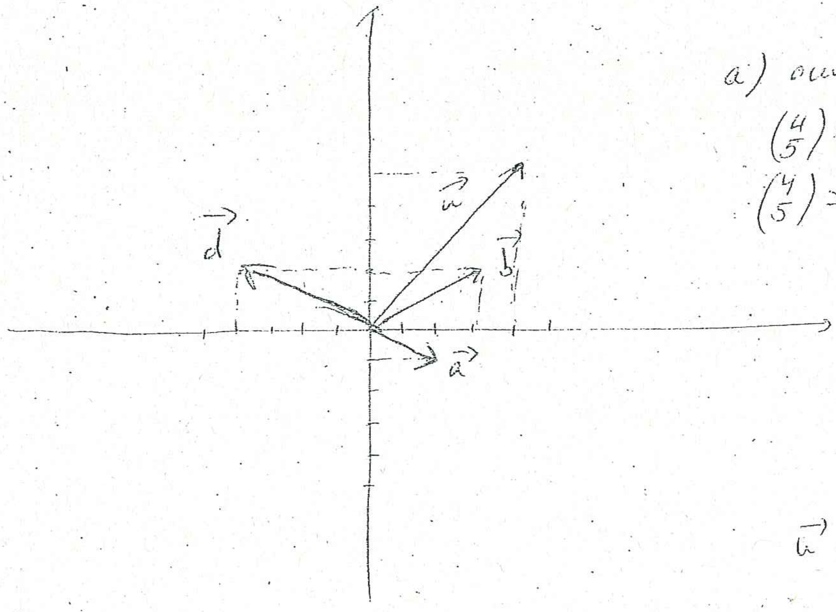
j) $\|\vec{v}-\vec{w}\| = \left\|\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}\right\| = \ldots = 6$

k) $\|\vec{v}\| + \|\vec{w}\| = 2\sqrt{5} + 2\sqrt{2}$

l) $\|\vec{v}\| - \|\vec{w}\| = 2\sqrt{5} - 2\sqrt{2}$

m) $2\vec{v} - 3\vec{w} = 2\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-6\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}14\\-2\end{pmatrix}$

ex18



a) oui :

$$\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\alpha+3\beta\\-\alpha+2\beta\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}2\alpha+3\beta=4\\-\alpha+2\beta=5\end{cases} \quad |2|$$

$$7\beta = 14$$

$$\beta = 2$$

donc $\alpha = 2\beta - 5 = -1$

$$\vec{u} = -\vec{a} + 2\vec{b}$$

b) non :

$$\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}4=2\alpha-4\beta\\5=-\alpha+2\beta\end{cases} \quad |2|$$

$$14 = 0 \qquad S = \emptyset$$

c) les vecteurs de la direction que celle de $\vec{a}$ et de $\vec{d}$!

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x=2\alpha-4\beta\\y=-\alpha+2\beta\end{cases} \quad |2|$$

$$x + 2y = 0$$

$$x = -2y \rightsquigarrow \vec{v}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \vec{v}\begin{pmatrix}-2y\\y\end{pmatrix} = y\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} = y\cdot\vec{a}$$

d)

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}x=2\alpha+\beta 3\\y=-\alpha+2\beta\end{cases} \quad |2|$$

$$x + 2y = 7\beta$$

$$\beta = \frac{x+2y}{7}$$

$$\hookrightarrow \alpha = 2\beta - y = \frac{2(x+2y)}{7} - \frac{y7}{7} = \frac{2x-3y}{7}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \left(\frac{2x-3y}{7}\right)\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix} + \left(\frac{x+2y}{7}\right)\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

ex 19

a) $\vec{d} = \alpha \vec{b} + \beta \vec{c} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\alpha + 4\beta \\ 2\alpha - 6\beta \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{array}{l} ① \\ ② \end{array} \begin{cases} 4 = 0\alpha + 4\beta \\ -1 = 2\alpha - 6\beta \end{cases}$

① : $\beta = 1$

donc ② : $-1 = 2\alpha - 6$

$2\alpha = 5$

$\alpha = 5/2$

donc $\vec{d} = \frac{5}{2}\vec{b} + 1\vec{c}$

b) $\vec{d} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{c} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\lambda + 4\mu \\ 3\lambda - 6\mu \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{array}{l} ① \\ ② \end{array} \begin{cases} 4 = -2\lambda + 4\mu \\ -1 = 3\lambda - 6\mu \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ +2 \end{vmatrix}$

$+$

$10 = 0$

$S = \emptyset$

on ne peut pas écrire $\vec{d}$ comme comb. linéaire de $\vec{a}$ et $\vec{c}$

c) $\vec{d} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} + \gamma \vec{c} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{array}{l} ① \\ ② \end{array} \begin{cases} 4 = -2\lambda + 0\mu + 4\gamma \\ -1 = 3\lambda + 2\mu - 6\gamma \end{cases} \begin{vmatrix} 3 \\ 2 \end{vmatrix}$

$+$

$10 = 0\lambda + 4\mu + 0\gamma$

$\mu = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$

Il y a plusieurs choix possibles (une infinité!) pour λ et γ

① : $4 = -2\lambda + 4\gamma$

prenons $\lambda = 0$: $\gamma = 1$

Une solution : $\vec{d} = 0\vec{a} + \frac{5}{2}\vec{b} + 1\vec{c}$

prenons $\lambda = 1$: $4\gamma = 4 + 2 \cdot 1 = 6$

$\gamma = 3/2$

une autre solution : $\vec{d} = 1\vec{a} + \frac{5}{2}\vec{b} + \frac{3}{2}\vec{c}$

etc...

ex 20

$\vec{v}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ ×

on veut • $\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2+b^2} = 4$

• $a = 2b$

donc $\sqrt{(2b)^2+b^2} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{5b^2} = 4 \Leftrightarrow \pm\sqrt{5}\, b = 4$

$\Leftrightarrow b = \pm \frac{4}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \pm \frac{4\sqrt{5}}{5}$

si $b = \frac{4\sqrt{5}}{5}$: $a = 2b = 8\sqrt{5}/5$

si $b = -\frac{4\sqrt{5}}{5}$: $a = 2b = -8\sqrt{5}/5$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 8\sqrt{5}/5 \\ 4\sqrt{5}/5 \end{pmatrix}$ ou $\vec{v} = \begin{pmatrix} -8\sqrt{5}/5 \\ -2\sqrt{5}/5 \end{pmatrix}$

ex 21

on cherche $\vec{w}$ tel que $\vec{w} = \lambda \vec{v}$ et $\|\vec{w}\| = 1$

d'où : $\vec{w} = \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad \|\vec{w}\| = \sqrt{(4\lambda)^2+(2\lambda)^2}$

$= \sqrt{16\lambda^2+4\lambda^2}$

$= \sqrt{20\lambda^2}$

$= \sqrt{4\lambda^2 \cdot 5}$

$= \pm 2\lambda\sqrt{5}$

$= 2\lambda\sqrt{5}$ (car une norme est toujours positive)

on veut $\|\vec{w}\| = 1 \Leftrightarrow 2\lambda\sqrt{5} = 1$

$\Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}\right) = \frac{\sqrt{5}}{2\cdot 5} = \frac{\sqrt{5}}{10}$

donc : $\vec{w} = \begin{pmatrix} 4 \cdot \sqrt{5}/10 \\ 2\sqrt{5}/10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{5}/5 \\ \sqrt{5}/5 \end{pmatrix}$

ex22 a) $3\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\0\\-11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\10\\-26\end{pmatrix}$

b) $\vec{AB}\begin{pmatrix}2-1\\4-2\\5-(-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\8\end{pmatrix}$ $\quad \vec{BA}\begin{pmatrix}-1\\-2\\-8\end{pmatrix}$

c) $\vec{OA}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\overset{?}{=}\lambda.\vec{OB}\begin{pmatrix}2\\4\\5\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}\overset{?}{=}\begin{pmatrix}2\lambda\\4\lambda\\5\lambda\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}1=2\lambda\\2=4\lambda\\-3=5\lambda\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=1/2\\\lambda=1/2\\\lambda=-3/5\end{cases}$

non! $\nexists\,\lambda\in\mathbb{R}$ tq $\vec{OA}=\lambda\vec{OB}$
donc O, A et B ne sont pas alignés

d) $\vec{AB}\begin{pmatrix}1\\2\\8\end{pmatrix}\overset{?}{=}\lambda\begin{pmatrix}0-1\\0-2\\-11-(-3)\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\2\\8\end{pmatrix}\overset{?}{=}\lambda\begin{pmatrix}-1\\-2\\-8\end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda=-1$

oui! A, B et C sont alignés

ex23 b) $\vec{a}\overset{?}{=}\lambda\vec{b}+\gamma\vec{c}$

$\begin{pmatrix}6\\0\\3,5\end{pmatrix}\overset{?}{=}\lambda\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}-3\\7\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}①\ 6=-3\gamma\\②\ 0=4\lambda+7\gamma\\③\ 3,5=\lambda\end{cases}$

①: $\gamma=-2$
③: $\lambda=3,5$
dans ②? $0\overset{?}{=}4\cdot3,5+7(-2)$
$0\overset{?}{=}14-14$ oui!

donc on peut écrire $\vec{a}$ comme comb. lin. de $\vec{b}$ et $\vec{c}$:

$\vec{a}=3,5\cdot\vec{b}+(-2)\cdot\vec{c}$

[d'où aussi: $\vec{b}=\frac{1}{3,5}\vec{a}+\frac{2}{3,5}\vec{c}$
$\vec{c}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{3,5}{2}\vec{b}$]

b) $\vec{d}\overset{?}{=}\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\overset{?}{=}\alpha\begin{pmatrix}6\\0\\3,5\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\4\\1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}-3\\7\\0\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}①\ 1=6\alpha-3\gamma\\②\ 2=4\beta+7\gamma\\③\ 3=3,5\alpha+\beta\end{cases}$ on prend ② $2=4\beta+7\gamma$ ③ $3=3,5\alpha+\beta$ $\left|\begin{matrix}1\\-4\end{matrix}\right|$

$$\begin{cases} ② \quad 2 = 4\beta + 7\gamma \\ ③ \quad -12 = -14\alpha - 4\beta \end{cases}$$

$$④ \quad -10 = -14\alpha + 7\gamma$$

on prend ④ et ① :

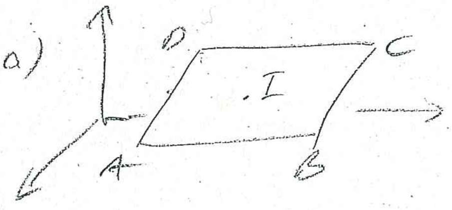
$$\begin{aligned} ① \quad 1 &= 6\alpha - 3\gamma \quad \left| \begin{matrix} 7 \\ 3 \end{matrix} \right| \\ ④ \quad -10 &= -14\alpha + 7\gamma \\ \hline ⑤ \quad -23 &= 0\alpha + 0\gamma \quad !! \end{aligned}$$

impossible

donc $\vec{d}$ ne s'écrit pas comme combinaison linéaire de $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$

ex 24

a)



à voir : $\overrightarrow{AD} \stackrel{?}{=} \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB} \stackrel{?}{=} \overrightarrow{DC}$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \checkmark \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \checkmark$$

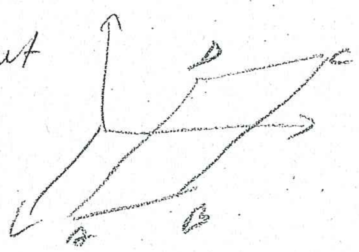
b) $$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-3 \\ y-(-1) \\ z-2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3 = 2{,}5 \\ y+1 = 3 \\ z-2 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5{,}5 \\ y = 2 \\ z = -2 \end{cases}$$

donc $I = (5{,}5 ; 2 ; -2)$

ex 25

on veut



$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ ou $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-x \\ 3-y \\ 2-z \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 4-x \\ 1 = 3-y \\ -2 = 2-z \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \\ z = 4 \end{cases} \qquad D(3 ; 2 ; 4)$$

$D(3 ; 2 ; 4)$

ex25

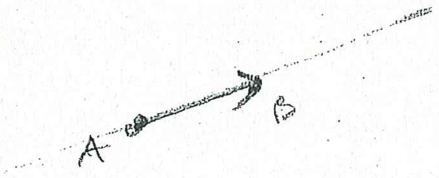
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 11-(-1) \\ 6-0 \\ -5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AQ}\begin{pmatrix} 23-(-1) \\ 12-0 \\ -10-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 12 \\ -11 \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{AQ} \neq k \cdot \overrightarrow{AB}$, donc $Q \notin d_{AB}$

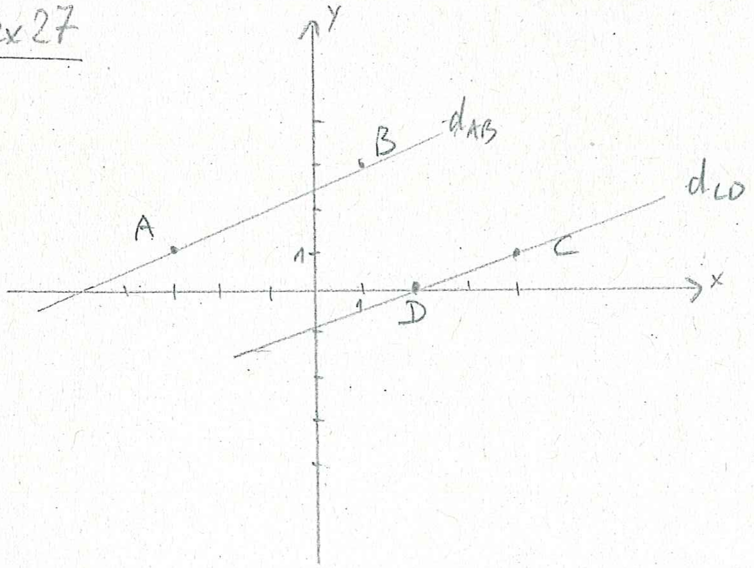
$\overrightarrow{AR}\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\quad 1{,}5 \cdot \overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AB}$, donc $R \in d_{AB}$

$\overrightarrow{AT}\begin{pmatrix} -20 \\ -10 \\ 10 \end{pmatrix}$ $\quad -\frac{5}{3} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AT}$, donc $T \in d_{AB}$

Comme $\overrightarrow{AR} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, c'est $R \in [AB]$



ex27



Conj : $d_{AB} \parallel d_{CD}$

dém : $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1-(-3) \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 2-4 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

on a : $-2 \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$

donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires

donc $d_{AB} \parallel d_{CD}$

ex28

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1-(-3) \\ 3-1 \\ -5-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} x-4 \\ 0-1 \\ z-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-4 \\ -1 \\ z \end{pmatrix}$

$d_{AB} \parallel d_{CD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ colinéaires

$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}^* \text{ tq } k\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

$\Leftrightarrow k\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-4 \\ -1 \\ z \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4k \\ 2k \\ -12k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-4 \\ -1 \\ z \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} ① \; 4k = x-4 \\ ② \; 2k = -1 \\ ③ \; -12k = z \end{cases}$

② : $k = -1/2$

dans ① $4\left(-\frac{1}{2}\right) = x-4$

$\Leftrightarrow -2 = x-4$

$\Leftrightarrow x = 2$

dans ③ : $-12\left(-\frac{1}{2}\right) = z$

$\Leftrightarrow z = 6$

$\boxed{x = 2 \text{ et } z = 6}$