Produit scalaire

Objectif

Disposer d'un outil qui permette de travailler les angles entre vecteurs ...

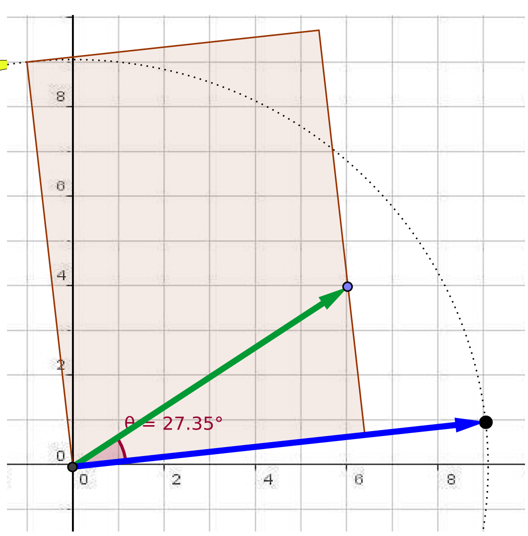
Définition

Le produit scalaire de deux vecteurs (du plan, de l'espace, …) est défini par : $\vec{v}\cdot\vec{w}=\|v\|\cdot\|w\|\cos(\alpha)$

Où α est l'angle entre $\vec{v}$ et $\vec{w}$ (compris entre 0° et 180°)

Remarque	Le produit scalaire entre deux vecteur est un nombre (un scalaire!)

Interprétation géométrique



Propriétés

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs (du plan ou de l'espace) et $\lambda\in\mathbb{R}$

Alors on a :

$$(1)\ \vec{v}\cdot\vec{w}=\vec{w}\cdot\vec{v}$$
$$(2)\ \vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$$
$$(3)\ \lambda(\vec{v}\cdot\vec{w})=(\lambda\vec{v})\cdot\vec{w}=\vec{v}\cdot(\lambda\vec{w})$$
$$(4)\ \vec{v}\cdot\vec{v}=\|\vec{v}\|^2$$

Remarque	La 2e propriété est démontrée via l'interprétation géométrique

Théorème

Produit scalaire en composantes

Soient $\vec{v}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}$, alors on a : $\vec{v}\cdot\vec{w}=v_1w_1+v_2w_2$

Soient $\vec{v}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}$, alors on a : $\vec{v}\cdot\vec{w}=v_1w_1+v_2w_2+v_3w_3$