Théorème

Soit d une droite du plan. Alors on a :

$$\vec{v}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur de } d \Leftrightarrow \vec{n}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \text{ est un vecteur normal à } d$$

Démonstration

I) Hypothèse : $\vec{v}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d

Conclusion : $\vec{n}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à d

Démonstration :

$\vec{v}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d, car [ARG 1 : ……….……….………………………….]

Alors on a :

$\vec{v}\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, car [ARG 2 : ……………………..…………….………..……..………]

$=a(-b)+ba$, car [ARG 3 : ……………………..…………….………..………...…]

$=0$

donc $\vec{v}\perp\vec{n}$, car [ARG 4 : ……………………………………..………..……..……]

donc : $\vec{n}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à d, car [ARG 5 :…..…………..………..……..……]

II) Hypothèse : $\vec{n}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à d

Conclusion : $\vec{v}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de d

Démonstration :

$\vec{n}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à d, car [ARG 6 : ……….……….………………………….]

Alors on a :

$\vec{v}\cdot\vec{n}=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, car [ARG 7 : ……………………..…………….………..……..………]

$=a(-b)+ba$, car [ARG 8 : ……………………..…………….………..………...…]

$=0$

donc $\vec{v}\perp\vec{n}$, car [ARG 9 : ……………………………………..………..……..……]

donc : $\vec{v}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur e d, car [ARG 10 :…...………..………..…………….……]

Remarque : on peut bien sûr rédiger cette démonstration de façon bien plus légère ...