

Théorème « Relation entre équation de d et vecteur normal à d »

- a) Si d est une droite du plan d'équation (cartésienne) $ax + by + c = 0$ et qu'on considère le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, alors \vec{n} est un vecteur normal à d .
- b) Si $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à une droite d du plan et $A(x_0; y_0)$ un point quelconque de d , alors $ax + by - (ax_0 + by_0) = 0$ est une équation (cartésienne) de d

Démonstration

- a) Soit $A(a_1; a_2)$ et $B(b_1; b_2)$ deux points de d . Il faut montrer que \vec{n} et \overrightarrow{AB} sont perpendiculaires, car [ARG 1: *déf de vecteur normal et directeur*]

On a :

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} &= \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}, \text{ car [ARG 2: substitution et vecteur entre 2 pts]} \\ &= a(b_1 - a_1) + b(b_2 - a_2), \text{ car [ARG 3: thm pr. scal. en composantes]} \\ &= ab_1 + bb_2 - (aa_1 + ba_2) \end{aligned}$$

Or on sait que $ab_1 + bb_2 + c = 0$ et $aa_1 + ba_2 + c = 0$,

car [ARG 4: A et B appartiennent à la droite, donc leurs coordonnées sont solution de l'équation de d]

donc $ab_1 + bb_2 = -c$ et $aa_1 + ba_2 = -c$, car [ARG 5: $-c$ dans les 2 équations]

donc $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = -c - (-c)$, car [ARG 6: substitution]

c'est-à-dire $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

donc \vec{n} et \overrightarrow{AB} sont perpendiculaires, car [ARG 7: thm « orthogonalité et pr.scal »]

- b) Soit $M(x; y)$ un point quelconque de d .

On a: $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, car [ARG 8: \overrightarrow{AM} vect.dir de d et \vec{n} normal sont donc orthogonaux ; puis thm « orthogonalité et pr.scal »]

d'où:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0, \text{ car [ARG 9: substitution]} \\ &\Leftrightarrow (x - x_0)a + (y - y_0)b = 0, \text{ car [ARG 10: thm pr. scalaire en composante]} \\ &\Leftrightarrow ax + by - (ax_0 + by_0) = 0 \end{aligned}$$