

## Math 3N - Préparation pour les exercices de la semestrielle orale de juin

Remarque : L'exercice de l'oral n'est pas identique à l'un des exercices ci-dessous, il est forcément plus restreint vu le temps imparti. Pour vous préparer au mieux, il s'agit de savoir résoudre ce type de problèmes (liste non exhaustive!).

### Exercice 1

Calculer si elles existent les limites suivantes et interpréter graphiquement le résultat:

(a)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 18}{3 - x}$

(f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-8}{1 - 4x^2}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{16 - x^2}{x^2 - 4x}$

(g)  $\lim_{x \rightarrow \frac{3}{5}} \frac{\sin(3 - 5x)}{15x - 9}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{3 - \sqrt{12 - 3x}}$

(h)  $\lim_{x \rightarrow -7} \frac{\sin(x + 7)}{\cos(x + 7)}$

(d)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3 + x^2} + 4}{1 - x}$

(i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(-2x)}{5x}$

(e)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3 + x}{2x^3 + 1}$

(j)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cos(3x)}{-2x^2}$

### Exercice 2

Trouver toutes les asymptotes de la fonction  $f$  déterminée par  $f(x) = \frac{3x^3 + 3x^2}{2 - 2x^2}$

### Exercice 3

Montrer que la dérivée de la fonction réelle définie par  $f(x) = \frac{3x^3 + 3x^2}{2 - 2x^2}$  est donnée par

$f'(x) = \frac{x(6 - 3x)}{2(x - 1)^2}$  et l'utiliser pour déterminer les extrema de  $f$ .

### Exercice 4

- (a) A partir de la définition de la dérivée de  $f$  en  $a$ , calculer la dérivée  $f'(a)$  et interpréter graphiquement dans le cas où  $f$  est la fonction réelle définie par :  $f(x) = -2x + 3$  et  $a = -1$ .
- (b) A partir de la définition de la fonction dérivée de  $f$ , calculer la dérivée  $f'(x)$  de la fonction réelle  $f$  définie par  $f(x) = \sqrt{4 - x}$

## Exercice 5

En utilisant les formules vues au cours, déterminer les dérivées des fonctions réelles suivantes; donner une réponse ne comprenant aucun exposant négatif ou fractionnaire :

(a)  $f(x) = \frac{2}{x} + \sqrt[3]{x} - 56$

(e)  $f(x) = \sin(-x) + \tan(x)$

(b)  $f(x) = \frac{3x^2 - 2x + 2}{x - 1}$

(f)  $f(x) = \cos(x^5 + x)$

(c)  $f(x) = -4\sqrt{x^2 + 1}$

(g)  $f(x) = \cos^{10}\left(\frac{1}{4x + 1}\right)$

(d)  $f(x) = (4 - 3x)^9 \cdot (2x^2 + 1)^6$

(h)  $f(x) = x^3 - x\sqrt{2x}$

(i)  $f(x) = \text{tg}(\sin(x))$

dans ce cas, on demande une réponse sous forme la plus factorisée possible

## Exercice 6

On considère la fonction réelle définie par  $f(x) = \frac{1}{2x - 1}$ .

- Déterminer  $f'(x)$  à l'aide des formules de dérivation.
- Déterminer  $f'(x)$  à partir de la définition de la dérivée.
- Déterminer l'équation de la tangente  $t$  à  $f$  au point  $(1; f(1))$  puis représenter graphiquement de façon précise  $f$  et  $t$  dans le même repère.

## Exercice 7

Soit la fonction réelle  $f$  définie par  $f(x) = x^3 - 3x^2 - 60x + 3$ .

- Déterminer s'il y a des droites tangentes à  $f$  dont la pente est égale à 12
- Si oui, donner les équations de ces droites tangentes et les coordonnées des points de tangence.

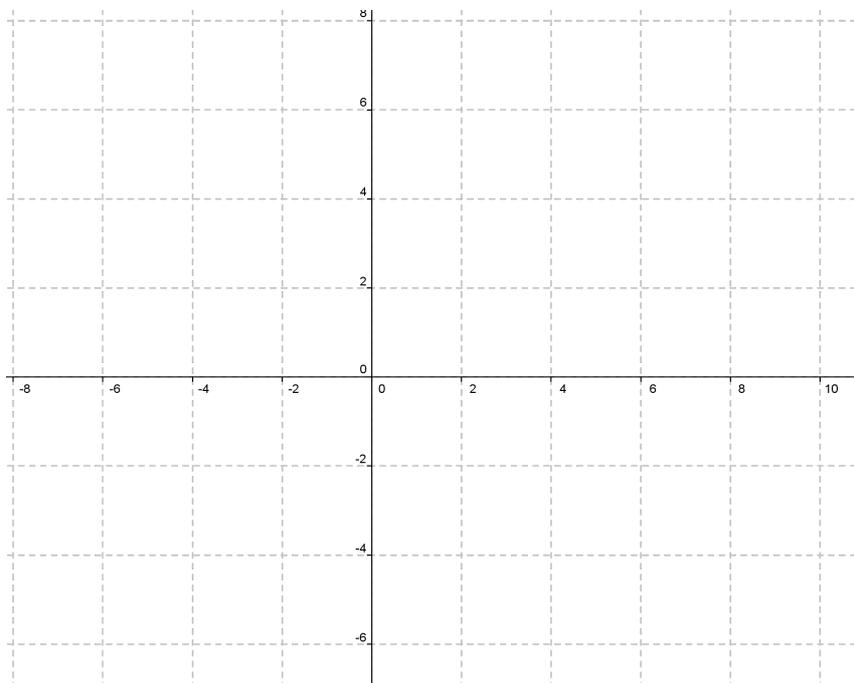
## Exercice 8

Représenter graphiquement une (unique) fonction  $f$  de votre choix qui vérifie toutes les conditions suivantes :

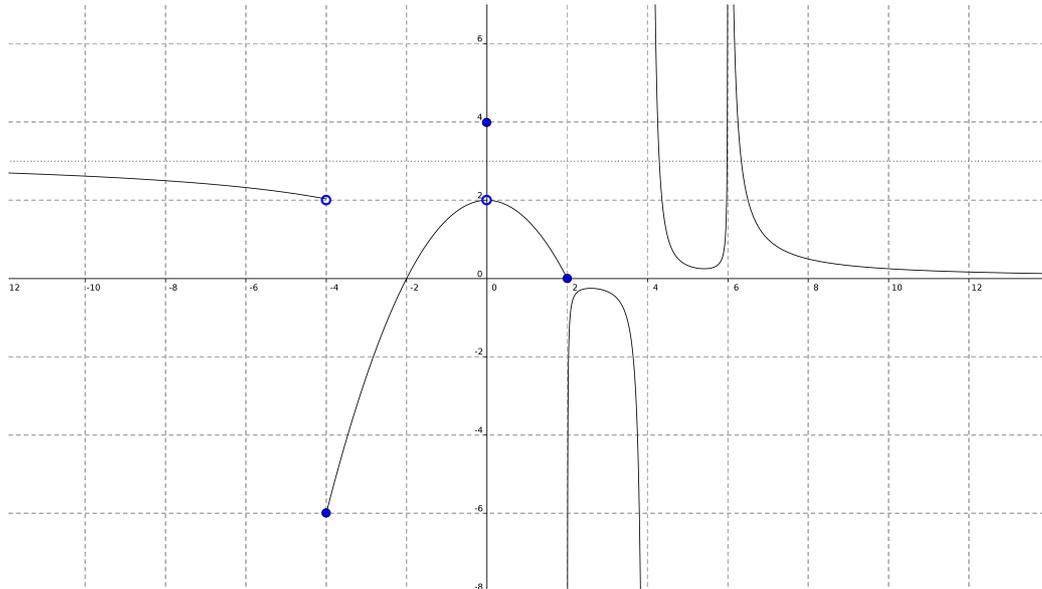
- L'ensemble  $Z_f$  des zéros de  $f$  est  $\{-4; 2\}$
- L'image de 0 est 2
- $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -4$
- $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = -2$  et  $f(4) = 2$
- $f$  admet un point d'inflexion en  $x = 6$
- $f'(3) = 0$
- $f'(-1) = -1$
- $f$  n'est pas dérivable en  $x = -5$

## Exercice 9

On donne ci-dessous une représentation graphique d'une fonction réelle  $f$ . Tracer soigneusement une esquisse d'une représentation graphique de la fonction dérivée  $f'$  de  $f$  dans le repère supplémentaire fourni en-dessous :



## Exercice 10



Donner la valeur des limites suivantes d'après la représentation graphique ci-dessus (vous pouvez répondre directement sur l'énoncé) :

- |                                      |   |                                     |
|--------------------------------------|---|-------------------------------------|
| (a) $\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x)$ | (e) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$       | (h) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$ |
| (b) $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$   | (f) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$       | (i) $\lim_{x \rightarrow 6^+} f(x)$ |
| (c) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$   | (g) $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$     | (j) $\lim_{x \rightarrow 6} f(x)$   |
| (d) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$    | (k) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ |                                     |

## Exercice 11

Trouver deux nombres positifs  $x$  et  $y$  dont la somme soit égale à 60 et tels que  $xy^3$  soit

- (a) maximal (b) minimal.

## Exercice 12

Déterminer les dimensions du rectangle de plus grande aire ayant un périmètre de 30 cm.

## Exercice 13

Six couples sont réunis dans une soirée de réveillon. Une fois les bises de bonne année échangées, on danse de façon conventionnelle (un homme avec une femme), mais pas forcément la sienne. Supposons que les couples se forment au hasard.

- (a) Quelle est la probabilité  $P(A)$  pour que chacun des 6 hommes danse avec son épouse légitime ?
- (b) Quelle est la probabilité  $P(B)$  pour que André danse avec son épouse ?
- (c) Quelle est la probabilité  $P(C)$  pour que André et René dansent avec leur épouse ?
- (d) Quelle est la probabilité  $P(D)$  pour que André ou René danse(nt) avec leur épouse ?

## Exercice 14

Une urne contient 20 boules indiscernables au toucher : 8 jaunes, 6 rouges, 4 vertes et 2 bleues.

- (a) On considère l'épreuve qui consiste à tirer au hasard une boule de l'urne.
- i. Décrire l'univers et la probabilité de chacun des événements élémentaires.
  - ii. Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants :
    - la boule tirée n'est pas jaune,
    - la boule tirée est rouge ou verte,
    - la boule tirée n'est pas noire.
- (b) On considère maintenant l'épreuve qui consiste à tirer au hasard successivement sans remise deux boules de cette même urne. Quelle est la probabilité de chacun des événements:
- i. les deux boules tirées sont jaunes,
  - ii. on a tiré une boule rouge et une boule verte.

## Exercice 15

On lance deux dés, à six faces, non truqués. L'un des dés est rouge, l'autre blanc.

- (a) Calculer les probabilités des événements suivants :
- i. A : le dé rouge donne un 1 et le dé blanc un 4 ;
  - ii. B : on obtient un 1 et un 4 ;
  - iii. C : on obtient un double ;
  - iv. D : la somme des résultats donnés par les deux dés est égale à 6 ;
  - v. E : on obtient au moins un 6.
- (b) Calculer  $P(BUD)$
- (c) Calculer  $P(CUD)$

## Exercice 16

- (a) Une urne contient 12 boules numérotées de 1 à 12. On en tire une au hasard, et on considère les événements :  
A = "tirage d'un nombre pair",  
B = "tirage d'un multiple de 3".  
Les événements A et B sont-ils indépendants ?
- (b) Reprendre la question avec une urne contenant 13 boules.

## Exercice 17

Dans les barres de chocolat N., on trouve des images équitablement réparties des cinq personnages du dernier Walt Disney, une image par tablette. Ma fille veut avoir le héros Prince charmant : combien dois-je acheter de barres pour que la probabilité d'avoir la figurine attendue dépasse 80% ? Même question pour être sûr à 90%.

## Exercice 18

Dans la salle des profs 60% sont des femmes ; une femme sur trois porte des lunettes et un homme sur deux porte des lunettes : quelle est la probabilité pour qu'un porteur de lunettes pris au hasard soit une femme ?

## Exercice 19

On jette une pièce de monnaie deux fois de suite. Les événements A et B suivants sont-ils indépendants ?

A : « Le même côté sort deux fois. »

B : « Le nombre de côtés face est inférieur à deux. »

## Exercice 20

On tire au hasard une carte d'un paquet de 52 cartes à jouer ordinaires. Les événements A et B suivants sont-ils indépendants ?

A : « La carte tirée est un as. »

B : « La carte tirée est un pique. »

## Exercice 21

Je vais lancer une pièce de monnaie équilibrée pour la quatrième fois. Les trois premières fois j'ai obtenu pile. Quelle est la probabilité que j'obtienne pile encore cette fois ?

## Exercice 22\*

Un hôpital comporte deux salles d'opération qui ont la même probabilité d'être occupées. La probabilité que l'une des salles au moins soit occupée vaut 0.9, celle que toutes deux soient occupées 0.5. Quelle probabilité y a-t-il :

- (a) que la première salle soit libre ?
- (b) que les deux salles soient libres ?
- (c) que l'une des deux salles au moins soit libre ?
- (d) qu'une seule salle soit libre ?
- (e) que la seconde salle soit libre si l'on sait que la première est occupée ?
- (f) Les événements A et B suivants sont-ils indépendants ?
  - i. A : « La première salle est occupée »
  - ii. B : « La seconde salle est occupée »