Collège de Saussure

EXTRAITS DES FORMULAIRES ET TABLES

Mathématiques

Document à rendre à la fin de l'épreuve

- Aucune annotation autorisée -

Version CRM 2006

Table des matières

Mathématiques

Algèbre

Trigonométrie

Géométrie

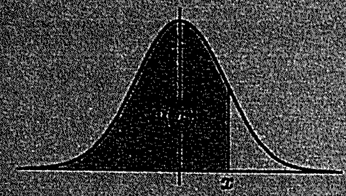
Probabilités et statistique

de $\Phi(x)$ dans les tables numériques (voir page 111).

$$\boxed{\Phi(x) = P(X^* \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt}$$

Propriétés

$P(a < X \le b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < X^* \le \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$
$P(X^* \le -x) = \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$
$P(-x < X^* \le x) = 2\Phi(x) - 1$



Exemple type

La taille des conscrits en Suisse suit une loi normale de moyenne 173 cm et d'écart type 8 cm. Quelle est la probabilité qu'un conscrit pris au hasard mesure entre 160 cm et 175 cm ?

On a $P(160 < X \le 175) = \Phi(\frac{175-173}{8}) - \Phi(\frac{160-173}{8}) = \Phi(0.25) - \Phi(-1.625)$
$= \Phi(0.25) - 1 + \Phi(1.625) = 0.5987 - 1 + 0.9484 = 0.5471$

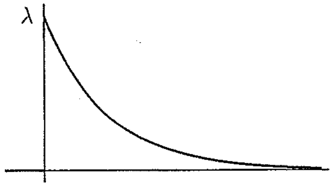
Moyenne et variance de quelques lois

	moyenne	variance
[illegible]	np	$np(1-p)$
[illegible]	$\frac{nR}{N}$	$\frac{nR}{N}\left(1-\frac{R}{N}\right)\left(\frac{N-n}{N-1}\right)$
[illegible]	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
[illegible]	λ	λ
[illegible]	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
[illegible]	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
[illegible]	μ	σ^2
[illegible]	0	1

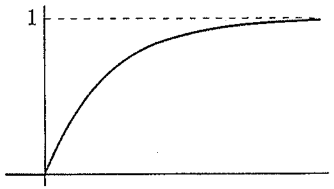
Loi exponentielle

On dit que X suit une loi exponentielle de paramètre λ positif, notée $\mathcal{E}(\lambda)$, si sa densité est

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$



Exemple type

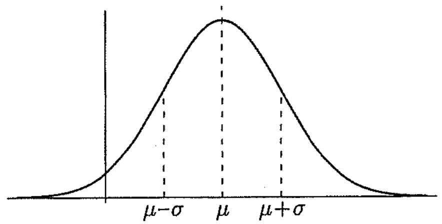
Un appareil tombe en panne en moyenne une fois tous les 4 ans. Quelle est la probabilité qu'il s'écoule moins d'une année entre 2 pannes ?

On note X le temps entre 2 pannes.
On a $\lambda = \frac{1}{4} = 0.25$. Donc $P(X \leq 1) = F(1) = 1 - e^{-0.25}$

Loi normale de Laplace-Gauss

On dit que X suit une loi normale de moyenne μ et d'écart type σ, notée $\mathcal{N}(\mu\,;\sigma)$, si sa densité est

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

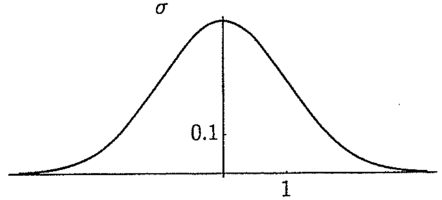


Il n'existe pas de forme analytique pour F.

Loi normale centrée réduite

Toute loi normale peut être ramenée à une loi normale de moyenne 0 et d'écart type 1, notée $\mathcal{N}(0\,;1)$, moyennant le changement de variable $X^* = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$



Il n'existe pas de forme analytique pour la fonction de répartition, notée Φ. On trouve les valeurs

Algèbre

Nombres complexes

On note i un nombre tel que $i^2 = -1$.

Forme algébrique $z = a + b\,i$ où $a, b \in \mathbb{R}$

a est la *partie réelle* de z, notée $\mathrm{Re}(z)$

b est la *partie imaginaire* de z, notée $\mathrm{Im}(z)$

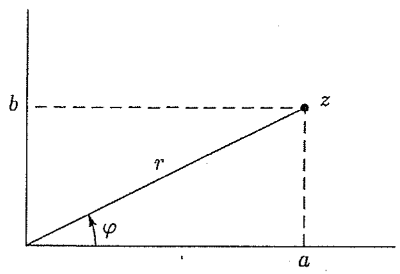
Forme trigonométrique $z = r\left(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\right) = r\,\mathrm{cis}(\varphi)$ avec $r \in \mathbb{R}_+$ et $\varphi \in \mathbb{R}$

r est le *module* de z, noté $|z|$

φ est l'*argument* de z, noté $\arg(z)$

Forme exponentielle $z = r\,e^{i\varphi}$

Relations entre formes algébrique, trigonométrique et exponentielle



$r = \sqrt{a^2+b^2}$	$\tan(\varphi) = \dfrac{b}{a}$
$\cos(\varphi) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\sin(\varphi) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$
$a = r\cos(\varphi)$	$b = r\sin(\varphi)$
Formule d'Euler	$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$

Opérations

Forme algébrique	Formes trigonométrique et exponentielle
$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$	
$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$	$z_1 z_2 = r_1 r_2 \operatorname{cis}(\varphi_1 + \varphi_2) = r_1 r_2\, e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$
$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{(a_1 a_2 + b_1 b_2)}{{a_2}^2 + {b_2}^2} + \dfrac{(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{{a_2}^2 + {b_2}^2} i$	$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} \operatorname{cis}(\varphi_1 - \varphi_2) = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$
$\dfrac{1}{z} = \dfrac{a}{a^2+b^2} - \dfrac{b}{a^2+b^2} i$	$\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{r} \operatorname{cis}(-\varphi) = \dfrac{1}{r} e^{-i\varphi}$
	$z^n = r^n \operatorname{cis}(n\varphi) = r^n\, e^{in\varphi}$

Formule de Moivre

$$\boxed{\big(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)\big)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)}$$

Racines n-ièmes

On note $z = r \operatorname{cis}(\varphi)$ un nombre complexe non nul.

L'équation $w^n = z, n \in \mathbb{N}^*$, possède n solutions distinctes :

$$\boxed{w_k = \sqrt[n]{r} \operatorname{cis}\left(\frac{\varphi + k\cdot 2\pi}{n}\right) = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\varphi+k\cdot 2\pi}{n}} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1}$$

Conjugué

Le *conjugué* de z est $\overline{z} = a - bi = r \operatorname{cis}(-\varphi) = r\, e^{-i\varphi}$.

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$	$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$	$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$	$z\overline{z} = \lvert z\rvert^2$
$\operatorname{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$	$\operatorname{Im}(z) = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$	$\overline{\overline{z}} = z$	$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{\lvert z\rvert^2}$

Loi de Poisson

Cette loi s'applique aux épreuves dont la réussite est un phénomène rare et sans vieillissement, c'est-à-dire se produisant avec la même probabilité quel que soit le moment où on observe et pour une même durée d'observation.

La variable aléatoire X, de moyenne λ, indique le nombre de réussites se produisant dans un intervalle de temps donné.

On dit que X suit une loi de Poisson de paramètre λ, notée $\mathcal{P}(\lambda)$, et on a

$$\boxed{P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}}$$

Exemple type

On constate que le nombre moyen d'arrivées de clients à un guichet est de 1.9 par minute. Quelle est la probabilité d'observer 5 arrivées en une minute ?

On a $\lambda = 1.9$ et $k = 5$. Donc $P(X = 5) = \dfrac{e^{-1.9} 1.9^5}{5!}$

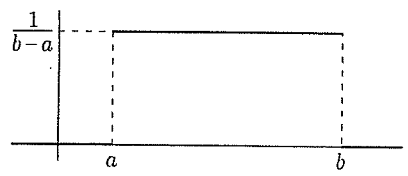
Quelques lois de probabilité continues

On note f la densité de probabilité d'une variable aléatoire continue X et F sa fonction de répartition.

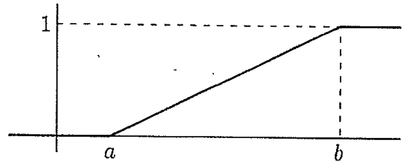
Loi uniforme

On dit que X suit une loi uniforme de paramètres a et b, notée $\mathcal{U}(a\,;b)$, si sa densité est

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \le x \le b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a \le x \le b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$



Exemple type

Un bus part du terminus toutes les 10 minutes. Quelle est la probabilité qu'un usager arrivant au hasard doive attendre moins de 3 minutes ?

On note X le temps d'attente (en minutes) de l'usager.

On a $a = 0$ et $b = 10$. Donc $P(X \le 3) = F(3) = \dfrac{3-0}{10-0}$

Quelques lois de probabilité discrètes

Loi binomiale

Cette loi s'applique aux épreuves de type tirages avec remise.

On note A un événement de probabilité p. La variable aléatoire X indique le nombre de fois que A se réalise lors de n tirages avec remise (épreuves successives indépendantes).

On dit que X suit une loi binomiale de paramètres n et p, notée $\mathcal{B}(n;p)$, et on a

$$\boxed{P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}$$

Exemple type

On lance 10 fois un dé. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 7 fois un 6 ?

On a $n=10$, $p=\frac{1}{6}$ et $k=7$. Donc $P(X=7)=\binom{10}{7}(\frac{1}{6})^7(\frac{5}{6})^3$

Loi hypergéométrique

Cette loi s'applique aux épreuves de type tirages sans remise.

On note N le nombre d'objets à disposition dont R ont une caractéristique C donnée. On tire n objets, sans remise, parmi ces N objets. La variable aléatoire X indique le nombre d'objets tirés qui ont la caractéristique C.

On dit que X suit une loi hypergéométrique de paramètres N, R et n, notée $\mathcal{H}(N;R;n)$, et on a

$$\boxed{P(X=k)=\frac{\binom{R}{k}\binom{N-R}{n-k}}{\binom{N}{n}}}$$

Exemple type

On tire 7 cartes d'un jeu de 36 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 3 piques ?

On a $N=36$, $R=9$, $n=7$ et $k=3$. Donc $P(X=3)=\frac{\binom{9}{3}\binom{27}{4}}{\binom{36}{7}}$

Loi géométrique

Cette loi s'applique aux épreuves de type tirages avec remise interrompus à la première réussite.

On note A un événement de probabilité p. La variable aléatoire X indique le nombre de tirages avec remise effectués jusqu'à ce que A se réalise.

On dit que X suit une loi géométrique de paramètre p, notée $\mathcal{G}(p)$, et on a

$$\boxed{P(X=k)=p\,(1-p)^{k-1}}$$

Exemple type

On lance un dé jusqu'à ce qu'on obtienne un 6. Quelle est la probabilité de devoir le lancer 5 fois ?

On a $k=5$ et $p=\frac{1}{6}$. Donc $P(X=5)=\frac{1}{6}\,(\frac{5}{6})^4$

Trigonométrie

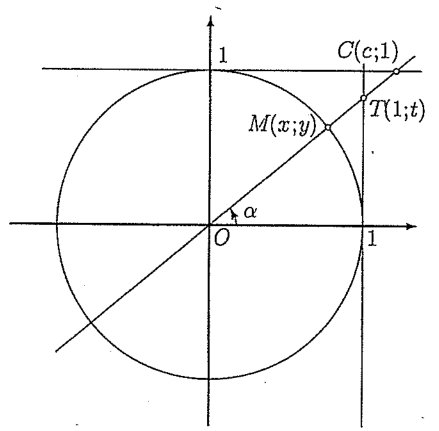
Trigonométrie plane

Conversion des mesures d'angles

On note respectivement d, r et g la mesure d'un angle en degrés, en radians et en grades.

Pour un même angle, on a $\boxed{\frac{d}{180}=\frac{r}{\pi}=\frac{g}{200}}$

Définition des fonctions trigonométriques



$$\begin{aligned}\cos(\alpha)&=x\\ \sin(\alpha)&=y\\ \tan(\alpha)&=t\\ \cot(\alpha)&=c\end{aligned}$$

Relations entre fonctions trigonométriques d'un même arc

$\cos^2(\alpha)+\sin^2(\alpha)=1$	$\tan(\alpha)=\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$	$\cot(\alpha)=\frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)}$
$\cot(\alpha)=\frac{1}{\tan(\alpha)}$	$\frac{1}{\cos^2(\alpha)}=1+\tan^2(\alpha)$	$\frac{1}{\sin^2(\alpha)}=1+\cot^2(\alpha)$

Valeurs exactes des fonctions trigonométriques d'arcs particuliers

α		$\cos(\alpha)$	$\sin(\alpha)$	$\tan(\alpha)$
0°	0	1	0	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	0	1	-

Périodicité des fonctions trigonométriques

$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)$	$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha)$	$\tan(\alpha + \pi) = \tan(\alpha)$

Relations entre fonctions trigonométriques de certains arcs

$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$	$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$	$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$
$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$	$\tan(\pi + \alpha) = \tan(\alpha)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot(\alpha)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin(\alpha)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(\alpha)$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot(\alpha)$

Fonctions trigonométriques d'une somme et d'une différence d'arcs

$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$	$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$
$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$	$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$
$\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}$	$\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)}$

Propriétés de la moyenne et de la variance

On note X et Y deux variables aléatoires, k un réel et K la variable aléatoire constante correspondante, c'est-à-dire telle que $P(K = k) = 1$

$E(X+Y) = E(X) + E(Y)$	$E(KX) = kE(X)$	$E(K) = k$	$E(X+K) = E(X) + k$
Si X et Y sont indépendantes, alors $E(XY) = E(X)\,E(Y)$			

$V(X) = E(X^2) - E^2(X)$	$V(KX) = k^2V(X)$	$V(K) = 0$	$V(X+K) = V(X)$
Si X et Y sont indépendantes, alors $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$			

Variable aléatoire centrée réduite

Si X est une variable aléatoire de moyenne μ et d'écart type σ, alors la variable aléatoire *centrée réduite* $X^* = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ a les propriétés suivantes $\boxed{E(X^*) = 0}$ et $\boxed{S(X^*) = 1}$

Épreuves répétées indépendantes

On note $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même moyenne μ et de même écart type σ. La variable aléatoire $T = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ a les propriétés suivantes :

$E(T) = n\mu$	$S(T) = \sqrt{n}\,\sigma$

Si $n \to +\infty$, la variable aléatoire centrée réduite T^* tend vers la loi normale centrée réduite (théorème central limite, voir page 106).

Inégalité de Bienaymé-Tchébychev

On note X une variable aléatoire et k un réel positif. Alors

$$\boxed{P\Big(\big|X - E(X)\big| \geq k\Big) \leq \frac{V(X)}{k^2}}$$

Dans le cas d'épreuves répétées indépendantes et en appliquant cette inégalité à la variable aléatoire $F = \dfrac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$, on obtient la formule de Bernoulli :

$$\boxed{P\Big(\big|F - \mu\big| \geq k\Big) \leq \frac{\sigma^2}{nk^2}}$$

Événements indépendants

Si $\boxed{P(A \cap B) = P(A)\,P(B)}$, on dit que les événements A et B sont *indépendants.*

Dans ce cas, on a $\boxed{P(B|A) = P(B)}$ et $\boxed{P(A|B) = P(A)}$

Théorème de la probabilité totale et théorème de Bayes

Si $B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \ldots \cup B_n = U$, $B_i \cap B_j = \varnothing$ et $P(B_i) \neq 0$ pour tout i, j $(i \neq j)$, alors

$$P(A) = P(A|B_1)\,P(B_1) + P(A|B_2)\,P(B_2) + P(A|B_3)\,P(B_3) + \ldots + P(A|B_n)\,P(B_n)$$

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)\,P(B_k)}{P(A)}$$

Variable aléatoire

On note X une variable aléatoire, $E(X)$ sa moyenne ou espérance, $V(X)$ sa variance et $S(X)$ son écart type.

Autres notations : $M(X)$ ou μ pour la moyenne, $\mathrm{Var}(X)$ pour la variance, σ pour l'écart type.

Variable aléatoire discrète

Si la variable aléatoire X prend les valeurs x_1, x_2, x_3, ... avec les probabilités respectives p_1, p_2, p_3, ... telles que $\boxed{\sum_i p_i = 1}$, alors

$E(X) = \sum_i p_i x_i$	$V(X) = \sum_i p_i \big(x_i - E(X)\big)^2 = \sum_i p_i x_i^2 - E^2(X)$	$S(X) = \sqrt{V(X)}$

Variable aléatoire continue

On note f une fonction telle que $f(x) \geq 0$ pour tout x réel et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$.

On dit que f est la *densité de probabilité* associée à la variable aléatoire continue X si $P(a < X \leq b) = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$.

On dit que F est la *fonction de répartition* associée à X si $F(x) = P(X \leq x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$.

$E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$	$V(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\big(x - E(X)\big)^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - E^2(X)$
$S(X) = \sqrt{V(X)}$écart type	

Variables aléatoires indépendantes

Deux variables aléatoires discrètes X et Y sont *indépendantes* si, pour tout a, b, on a $P\big((X = a) \text{ et } (Y = b)\big) = P(X = a) \cdot P(Y = b)$

Deux variables aléatoires continues X et Y sont *indépendantes* si, pour tout a, b, c, d, on a $P\big((a < X \leq b) \text{ et } (c < Y \leq d)\big) = P(a < X \leq b) \cdot P(c < Y \leq d)$

Fonctions trigonométriques du double et du triple d'un arc

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 1 - 2\sin^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1$$

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$$

$$\cos(3\alpha) = \cos(\alpha)\big(1 - 4\sin^2(\alpha)\big) = \cos(\alpha)\big(4\cos^2(\alpha) - 3\big)$$

$$\sin(3\alpha) = \sin(\alpha)\big(4\cos^2(\alpha) - 1\big) = \sin(\alpha)\big(3 - 4\sin^2(\alpha)\big)$$

$$\tan(3\alpha) = \frac{\tan(\alpha)\big(3 - \tan^2(\alpha)\big)}{1 - 3\tan^2(\alpha)}$$

Fonctions trigonométriques de la moitié d'un arc

$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 + \cos(\alpha)}{2}$	$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{2}$
$\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}$	$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}$

Fonctions trigonométriques exprimées à l'aide de $t = \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

$\cos(\alpha) = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$	$\sin(\alpha) = \frac{2t}{1 + t^2}$	$\tan(\alpha) = \frac{2t}{1 - t^2}$

Transformation d'une somme en produit

$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$	$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$	$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$
$\tan(\alpha) + \tan(\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}$	$\tan(\alpha) - \tan(\beta) = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}$

$a\cos(\alpha) + b\sin(\alpha) = A\cos(\alpha - \varphi)$ avec $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ et φ tel que $\cos(\varphi) = \frac{a}{A}$ et $\sin(\varphi) = \frac{b}{A}$

Transformation d'un produit en somme

$$\cos(\alpha)\cos(\beta) = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\big)$$

$$\cos(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\big)$$

$$\sin(\alpha)\sin(\beta) = \frac{1}{2}\big(-\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\big)$$

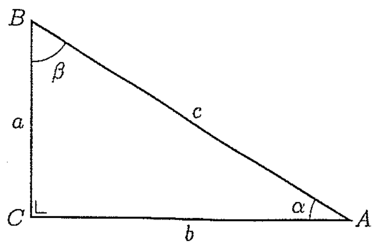
Équations trigonométriques simples

$$\cos(x) = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arccos(a) + k \cdot 2\pi \text{ ou} \\ x = -\arccos(a) + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

$$\sin(x) = a \Leftrightarrow \begin{cases} x = \arcsin(a) + k \cdot 2\pi \text{ ou} \\ x = \pi - \arcsin(a) + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

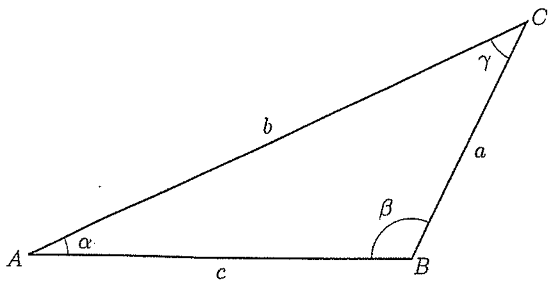
$$\tan(x) = a \Leftrightarrow x = \arctan(a) + k \cdot \pi$$

Triangle rectangle



$\cos(\alpha) = \frac{b}{c} = \sin(\beta)$	$\tan(\alpha) = \frac{a}{b} = \cot(\beta)$
$\sin(\alpha) = \frac{a}{c} = \cos(\beta)$	$\cot(\alpha) = \frac{b}{a} = \tan(\beta)$

Triangle quelconque



Théorème du cosinus

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos(\alpha) \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos(\beta) \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma) \end{aligned}}$$

Théorème du sinus

$$\boxed{\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)}}$$

Probabilités et statistique

Probabilités

Notations et définitions

On note U (*univers*) l'ensemble des issues possibles associées à une épreuve aléatoire donnée.

Un *événement* est un sous-ensemble de U. On note A, B, C, … des événements.

U est l'événement *certain* et $\varnothing$ l'événement *impossible*.
$\overline{A}$ est l'événement *contraire* de A (on lit *non* A).
$A \cup B$ est l'événement A *ou* B.
$A \cap B$ est l'événement A *et* B. Si $A \cap B = \varnothing$, on dit que A et B sont *incompatibles*.

On note $P(A)$ la probabilité de l'événement A.

Propriétés

$P(U) = 1$	$P(\varnothing) = 0$	$0 \leq P(A) \leq 1$	$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$	$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	A et B incompatibles $\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
A_1, A_2, A_3, … incompatibles deux à deux $\Rightarrow P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots$	

$P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1 - P(A \cap B)$	$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 1 - P(A \cup B)$	$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

Issues équiprobables

Si U est formé de n issues équiprobables et que l'événement A en contient k, alors $\boxed{P(A) = \frac{k}{n}}$

Probabilité conditionnelle

On note $P(B|A)$ la probabilité conditionnelle de B sachant que A est réalisé.

$P(B\|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$	$P(A \cap B) = P(A)\, P(B\|A) = P(B)\, P(A\|B)$
$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots) = P(A_1)\, P(A_2\|A_1)\, P(A_3\|(A_1 \cap A_2)) \ldots$	

Applications du calcul intégral à la géométrie

On considère un arc de courbe d'équation cartésienne $y = f(x)$ avec $a \le x \le b$.

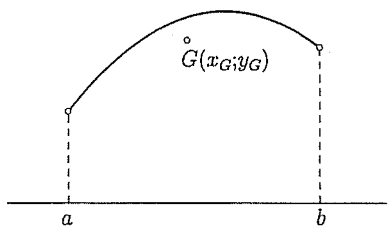
Longueur de l'arc

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$$

Centre de gravité de l'arc

$$x_G = \frac{1}{l} \int_a^b x\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$$

$$y_G = \frac{1}{l} \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$$



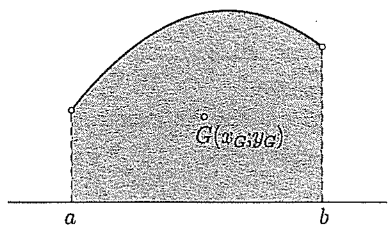
Aire de la surface

$$\mathcal{A} = \int_a^b f(x)\, dx \qquad \text{si } f \ge 0$$

Centre de gravité de la surface

$$x_G = \frac{1}{\mathcal{A}} \int_a^b x f(x)\, dx \qquad \text{si } f \ge 0$$

$$y_G = \frac{1}{2\mathcal{A}} \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$$



Aire latérale du corps

$$\mathcal{A}_{\text{lat}} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx \qquad \text{si } f \ge 0$$

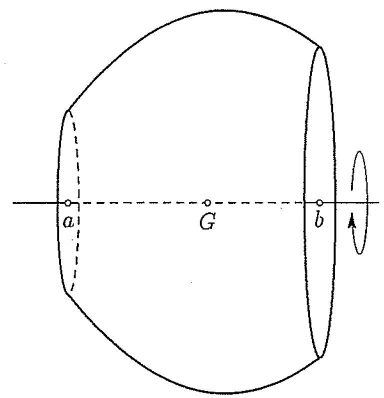
Volume du corps

$$\mathcal{V} = \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx$$

Centre de gravité du corps

$$x_G = \frac{\pi}{\mathcal{V}} \int_a^b x\left(f(x)\right)^2 dx$$

$$y_G = z_G = 0$$



On considère un arc de courbe d'équations paramétriques $\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}$ avec $t_1 \le t \le t_2$.

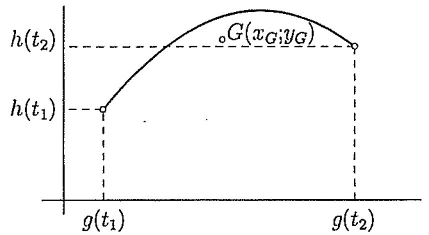
Longueur de l'arc

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(g'(t)\right)^2 + \left(h'(t)\right)^2}\, dt$$

Centre de gravité de l'arc

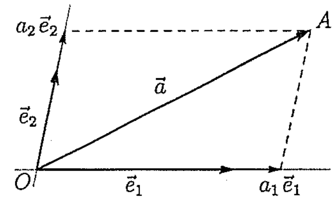
$$x_G = \frac{1}{l} \int_{t_1}^{t_2} g(t)\sqrt{\left(g'(t)\right)^2 + \left(h'(t)\right)^2}\, dt$$

$$y_G = \frac{1}{l} \int_{t_1}^{t_2} h(t)\sqrt{\left(g'(t)\right)^2 + \left(h'(t)\right)^2}\, dt$$



Composantes d'un vecteur relativement à une base

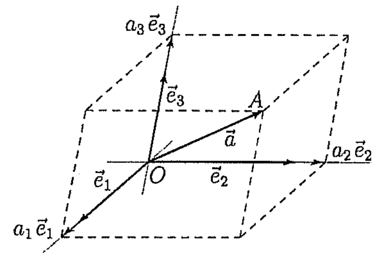
Dans le plan



Une base $\mathcal{B}=(\vec{e}_1\,;\vec{e}_2)$ est un couple de vecteurs linéairement indépendants

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

Dans l'espace



Une base $\mathcal{B}=(\vec{e}_1\,;\vec{e}_2\,;\vec{e}_3)$ est un triplet de vecteurs linéairement indépendants

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

Opérations avec les composantes

Si $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, alors $\vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix}$ $\lambda\vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \end{pmatrix}$	Si $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, alors $\vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix}$ $\lambda\vec{a} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix}$

Base orthonormée

On note $\|\vec{a}\|$ (ou a) la norme d'un vecteur $\vec{a}$. Si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont orthogonaux, on note $\vec{a} \perp \vec{b}$

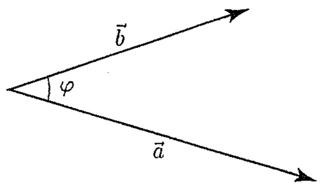
Dans le plan	Dans l'espace
$(\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ est une *base orthonormée* si	$(\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3)$ est une *base orthonormée* si
$\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = 1$ et $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$	$\|\vec{e}_1\| = \|\vec{e}_2\| = \|\vec{e}_3\| = 1$ et $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$, $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_3$, $\vec{e}_2 \perp \vec{e}_3$

Produit scalaire de deux vecteurs

Dans le plan	Dans l'espace
Si $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, alors	Si $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, alors
$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$	$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

Propriétés

$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$ $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$	$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$ $\vec{a}\cdot\vec{a}>0\Leftrightarrow\vec{a}\neq\vec{0}$
$\vec{a}\cdot\vec{b}=\lVert\vec{a}\rVert\,\lVert\vec{b}\rVert\cos(\varphi)$	
$\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Leftrightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$	



Norme d'un vecteur

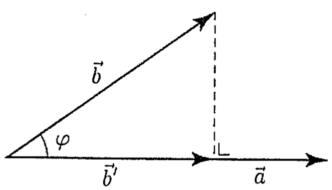
$\lVert\vec{a}\rVert=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$

Dans le plan	Dans l'espace
Si $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$, alors $\lVert\vec{a}\rVert=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}$	Si $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$, alors $\lVert\vec{a}\rVert=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2+{a_3}^2}$

$\lVert\lambda\vec{a}\rVert=\lvert\lambda\rvert\,\lVert\vec{a}\rVert$ $\lVert\vec{a}+\vec{b}\rVert\leq\lVert\vec{a}\rVert+\lVert\vec{b}\rVert$	$\lvert\vec{a}\cdot\vec{b}\rvert\leq\lVert\vec{a}\rVert\,\lVert\vec{b}\rVert$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}(\lVert\vec{a}\rVert^2+\lVert\vec{b}\rVert^2-\lVert\vec{a}-\vec{b}\rVert^2)$

Projection orthogonale de $\vec{b}$ sur $\vec{a}$

On note $\vec{b}'$ la projection orthogonale de $\vec{b}$ sur $\vec{a}$.



$\vec{b}'=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lVert\vec{a}\rVert^2}\,\vec{a}$	$\lVert\vec{b}'\rVert=\dfrac{\lvert\vec{a}\cdot\vec{b}\rvert}{\lVert\vec{a}\rVert}$	$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}'$

Angle de deux vecteurs

On note φ l'angle de $\vec{a}$ et $\vec{b}$ $(0\leq\varphi\leq 180^\circ)$.

$$\boxed{\cos(\varphi)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lVert\vec{a}\rVert\,\lVert\vec{b}\rVert}}$$

Propriétés

$\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx$
$\int_b^a f(x)\,dx=-\int_a^b f(x)\,dx$
Si $f(x)\leq g(x)$ pour tout $x\in[a\,;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx\leq\int_a^b g(x)\,dx$

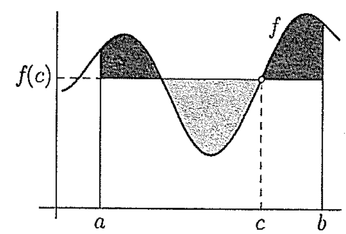
Méthodes d'intégration

Par linéarité	$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx=\int_a^b f(x)\,dx+\int_a^b g(x)\,dx$ $\int_a^b \lambda f(x)\,dx=\lambda\int_a^b f(x)\,dx$
Par parties	$\int_a^b f'(x)g(x)\,dx=f(b)g(b)-f(a)g(a)-\int_a^b f(x)g'(x)\,dx$
Par substitution	$\int_a^b g\big(f(x)\big)f'(x)\,dx=\int_{f(a)}^{f(b)} g(t)\,dt$ où $t=f(x)$
Par changement de variable	$\int_a^b g(x)\,dx=\int_c^d g\big(f(t)\big)f'(t)\,dt$ où $x=f(t)$, $f(c)=a$ et $f(d)=b$ (f bijective)

Théorème de la moyenne

On définit la *valeur moyenne* de f sur $[a\,;b]$ par $\mu=\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$

Si f est continue sur $[a\,;b]$, alors il existe $c\in\,]a\,;b[$ tel que $f(c)=\mu$



Substitutions particulières

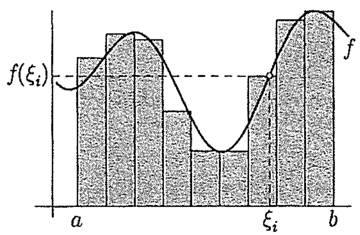
La fonction dont on cherche une primitive est fonction de	Substitution à effectuer		
e^x	$t = e^x$	$x = \ln(t)$	$dx = \frac{1}{t}\,dt$
$\sin^2(x)$ ou $\cos^2(x)$ ou $\tan(x)$	$t = \tan(x)$	$x = \arctan(t)$ $\sin^2(x) = \frac{t^2}{1+t^2}$	$dx = \frac{1}{1+t^2}\,dt$ $\cos^2(x) = \frac{1}{1+t^2}$
$\sin(x)$ ou $\cos(x)$	$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$	$x = 2\arctan(t)$ $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$	$dx = \frac{2}{1+t^2}\,dt$ $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
$\sqrt[n]{ax+b}$	$t = \sqrt[n]{ax+b}$	$x = \frac{t^n - b}{a}$	$dx = \frac{n}{a}t^{n-1}\,dt$
$\sqrt{a^2 - b^2x^2}$	$x = \frac{a}{b}\sin(t)$	$dx = \frac{a}{b}\cos(t)\,dt$	
$\sqrt{a^2 + b^2x^2}$	$x = \frac{a}{b}\tan(t)$ $x = \frac{a}{b}\sinh(t)$	$dx = \frac{a}{b\cos^2(t)}\,dt$ $dx = \frac{a}{b}\cosh(t)\,dt$	ou
$\sqrt{b^2x^2 - a^2}$	$x = \frac{a}{b\cos(t)}$ $x = \frac{a}{b}\cosh(t)$	$dx = \frac{a\sin(t)}{b\cos^2(t)}\,dt$ $dx = \frac{a}{b}\sinh(t)\,dt$	ou

Intégrale de Riemann

On note f une fonction continue sur $[a\,;b]$. On choisit une subdivision $x_0, x_1, \ldots, x_n$ de $[a\,;b]$ ($x_0 = a$, $x_n = b$) et ξ_i un nombre de l'intervalle $[x_{i-1}\,;x_i]$

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to+\infty \\ \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

où $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$



Théorème fondamental du calcul intégral

Si F est une primitive de f sur $[a\,;b]$, alors $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

La fonction F telle que $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.

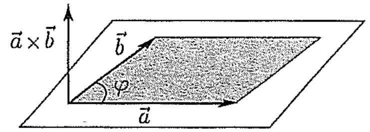
Produit vectoriel de deux vecteurs

Composantes du produit vectoriel

Si $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$, alors $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$

On note aussi ce produit $\vec{a} \wedge \vec{b}$.

Propriétés



1. $\vec{a} \times \vec{b}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.
2. Si $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont linéairement indépendants, alors $(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{a} \times \vec{b})$ est une base de l'espace, orientée positivement (règle du tire-bouchon).
3. $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\|\,\|\vec{b}\|\,\sin(\varphi)$.
   Ce nombre est égal à l'aire du parallélogramme construit sur $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

$\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$	$(\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \lambda(\vec{a} \times \vec{b})$
$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$	$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$
$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \;\Leftrightarrow\;$ $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont linéairement dépendants	

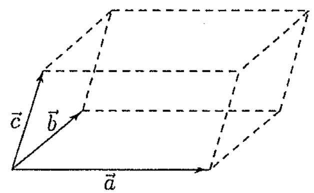
Produit mixte de trois vecteurs

$$[\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c}] = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \mathrm{Det}(\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c})$$

$$[\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c}] = [\vec{b}\,;\vec{c}\,;\vec{a}] = [\vec{c}\,;\vec{a}\,;\vec{b}] = -[\vec{a}\,;\vec{c}\,;\vec{b}] = -[\vec{c}\,;\vec{b}\,;\vec{a}] = -[\vec{b}\,;\vec{a}\,;\vec{c}]$$

$[\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c}] = 0 \;\Leftrightarrow\;$ $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$ sont linéairement dépendants

Le nombre $[\vec{a}\,;\vec{b}\,;\vec{c}]$ est, au signe près, le volume du parallélépipède construit sur $\vec{a}$, $\vec{b}$ et $\vec{c}$.



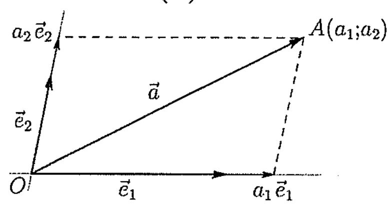
Géométrie analytique plane

Le signe ⦶ indique que le repère de référence est orthonormé.

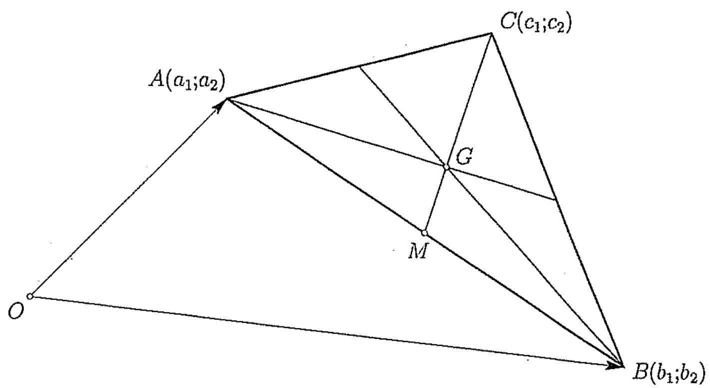
On note $(O\,;\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ un repère du plan. Le point O est l'*origine du repère*, le couple $(\vec{e}_1;\vec{e}_2)$ est la *base associée* au repère.

Les *coordonnées d'un point* A sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{OA}$.

On écrit $A(a_1;a_2)$ si $\overrightarrow{OA} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$



Vecteur défini par deux points	$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$	
Longueur d'un segment	$AB = \lVert\overrightarrow{AB}\rVert = \sqrt{(b_1-a_1)^2 + (b_2-a_2)^2}$	⦶
Milieu d'un segment	$\overrightarrow{OM} = \dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$ $\Leftrightarrow M\left(\dfrac{a_1+b_1}{2};\dfrac{a_2+b_2}{2}\right)$	
Centre de gravité d'un triangle	$\overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$ $\Leftrightarrow G\left(\dfrac{a_1+b_1+c_1}{3};\dfrac{a_2+b_2+c_2}{3}\right)$	



$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\operatorname{arsinh}(x)$	$x\operatorname{arsinh}(x) - \sqrt{x^2+1}$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\operatorname{arcosh}(x)$	$x\operatorname{arcosh}(x) - \sqrt{x^2-1}$
$\tanh(x)$	$\ln\big(\cosh(x)\big)$	$\operatorname{artanh}(x)$	$x\operatorname{artanh}(x) + \frac{1}{2}\ln(1-x^2)$
$\coth(x)$	$\ln\lvert\sinh(x)\rvert$	$\operatorname{arcoth}(x)$	$x\operatorname{arcoth}(x) + \frac{1}{2}\ln(x^2-1)$
$\sqrt{x^2+a}$	$\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+a} + \dfrac{a}{2}\ln\lvert x+\sqrt{x^2+a}\rvert$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$	$\ln\lvert x+\sqrt{x^2+a}\rvert$
$\sqrt{r^2-x^2}$	$\dfrac{x}{2}\sqrt{r^2-x^2} + \dfrac{r^2}{2}\arcsin\left(\dfrac{x}{r}\right)$	$\dfrac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}$	$\arcsin\left(\dfrac{x}{r}\right)$

Primitive d'une fonction rationnelle

Une fonction rationnelle est une fonction $f : x \mapsto \dfrac{p(x)}{q(x)}$ où $p(x)$ et $q(x)$ sont des polynômes.

Pour trouver une primitive d'une fonction rationnelle $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, on effectue d'abord la division euclidienne de $p(x)$ par $q(x)$. On peut alors écrire $f(x) = d(x) + \dfrac{r(x)}{q(x)}$ avec degré(r) < degré(q)

L'intégration du polynôme $d(x)$ ne pose pas de problème. Celle de $\dfrac{r(x)}{q(x)}$ dépend du degré de $q(x)$.
On ne traite ici que le cas où $q(x)$ est un polynôme de degré deux : $q(x) = ax^2 + bx + c$

1^er^ cas : $q(x)$ a deux zéros distincts x_1 et x_2

$$\boxed{\int \frac{r(x)}{q(x)}\,dx = \frac{\alpha}{a}\ln|x-x_1| + \frac{\beta}{a}\ln|x-x_2| + C}$$

avec α et β tels que $r(x) = \alpha(x-x_2) + \beta(x-x_1)$

2^e^ cas : $q(x)$ a un zéro unique x_0

$$\boxed{\int \frac{r(x)}{q(x)}\,dx = \frac{\alpha}{a}\ln|x-x_0| - \frac{\beta}{a(x-x_0)} + C}$$

avec α et β tels que $r(x) = \alpha(x-x_0) + \beta$

3^e^ cas : $q(x)$ n'a aucun zéro réel

$$\boxed{\int \frac{r(x)}{q(x)}\,dx = \alpha\ln|ax^2+bx+c| + \frac{2\beta}{\sqrt{4ac-b^2}}\arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right) + C}$$

avec α et β tels que $r(x) = \alpha(2ax+b) + \beta$

Primitive de quelques fonctions

$f(x)$	$F(x)$	$f(x)$	$F(x)$
a	ax	x^n	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\dfrac{1}{x^n}$	$\dfrac{-1}{(n-1)x^{n-1}}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
$\dfrac{1}{(x-a)(x-b)}$	$\dfrac{1}{a-b}\ln\left\lvert\dfrac{x-a}{x-b}\right\rvert$	$\dfrac{ax+b}{cx+d}$	$\dfrac{ax}{c}-\dfrac{ad-bc}{c^2}\ln\lvert cx+d\rvert$
$\dfrac{1}{x^2+a^2}$	$\dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)$	$\dfrac{1}{x^2-a^2}$	$\dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert\dfrac{x-a}{x+a}\right\rvert$
e^x	e^x	$\ln(x)$	$x(\ln(x)-1)$
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln(a)}$	$\log_a(x)$	$x(\log_a(x)-\log_a(e))$
xe^{ax}	$\dfrac{1}{a^2}(ax-1)e^{ax}$	$x\ln(ax)$	$\dfrac{x^2}{4}(2\ln(ax)-1)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\arcsin(x)$	$x\arcsin(x)+\sqrt{1-x^2}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\arccos(x)$	$x\arccos(x)-\sqrt{1-x^2}$
$\tan(x)$	$-\ln\lvert\cos(x)\rvert$	$\arctan(x)$	$x\arctan(x)-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$
$\cot(x)$	$\ln\lvert\sin(x)\rvert$	$\operatorname{arccot}(x)$	$x\operatorname{arccot}(x)+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$
$\sin^2(x)$	$\frac{1}{2}(x-\sin(x)\cos(x))$	$\dfrac{1}{\sin^2(x)}$	$-\cot(x)$
$\cos^2(x)$	$\frac{1}{2}(x+\sin(x)\cos(x))$	$\dfrac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$
$\tan^2(x)$	$\tan(x)-x$	$\dfrac{1}{\sin(x)}$	$\ln\left\lvert\dfrac{1-\cos(x)}{\sin(x)}\right\rvert$
$\cot^2(x)$	$-\cot(x)-x$	$\dfrac{1}{\cos(x)}$	$\ln\left\lvert\dfrac{1+\sin(x)}{\cos(x)}\right\rvert$
$\dfrac{1}{1+\sin(x)}$	$\dfrac{-\cos(x)}{1+\sin(x)}$	$\dfrac{1}{1-\sin(x)}$	$\dfrac{\cos(x)}{1-\sin(x)}$
$\dfrac{1}{1+\cos(x)}$	$\dfrac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$	$\dfrac{1}{1-\cos(x)}$	$\dfrac{-\sin(x)}{1-\cos(x)}$
$x\sin(ax)$	$-\dfrac{1}{a}x\cos(ax)+\dfrac{1}{a^2}\sin(ax)$	$x\cos(ax)$	$\dfrac{1}{a}x\sin(ax)+\dfrac{1}{a^2}\cos(ax)$
$e^{ax}\sin(bx)$	$\dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin(bx)-b\cos(bx))$	$e^{ax}\cos(bx)$	$\dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos(bx)+b\sin(bx))$

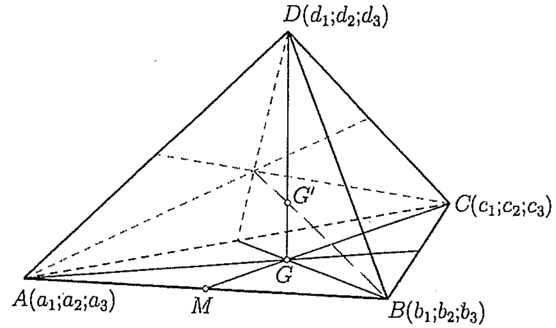
Géométrie analytique de l'espace

Le signe ⦶ indique que le repère de référence est orthonormé.

On note $(O\,;\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3)$ un repère de l'espace. Le point O est l'*origine du repère*, le triplet $(\vec{e}_1;\vec{e}_2;\vec{e}_3)$ est la *base associée* au repère.

Les *coordonnées d'un point A* sont les composantes du vecteur $\overrightarrow{OA}$.

On écrit $A(a_1;a_2;a_3)$ si $\overrightarrow{OA}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2+a_3\vec{e}_3=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}$



Vecteur défini par deux points	$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}b_1-a_1\\b_2-a_2\\b_3-a_3\end{pmatrix}$	
Longueur d'un segment	$AB=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$	⦶
Milieu d'un segment	$\overrightarrow{OM}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$ $\Leftrightarrow M\left(\dfrac{a_1+b_1}{2};\dfrac{a_2+b_2}{2};\dfrac{a_3+b_3}{2}\right)$	
Aire d'un triangle	$\mathcal{A}=\dfrac{1}{2}\lVert\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\rVert$	⦶
Centre de gravité d'un triangle	$\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$ $\Leftrightarrow G\left(\dfrac{a_1+b_1+c_1}{3};\dfrac{a_2+b_2+c_2}{3};\dfrac{a_3+b_3+c_3}{3}\right)$	
Volume d'un tétraèdre	$\mathcal{V}=\dfrac{1}{6}\lvert\mathrm{Det}(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AD})\rvert$	⦶
Centre de gravité d'un tétraèdre	$\overrightarrow{OG'}=\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})$	

Droite

On note d une droite passant par le point $A(a_1; a_2; a_3)$ et de vecteur directeur $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix}$

Un point $P(x\,;y\,;z)$ appartient à la droite d si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

Équation vectorielle $\quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda \vec{d} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

Équations paramétriques $\quad \begin{cases} x = a_1 + \lambda\, d_1 \\ y = a_2 + \lambda\, d_2 \\ z = a_3 + \lambda\, d_3 \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

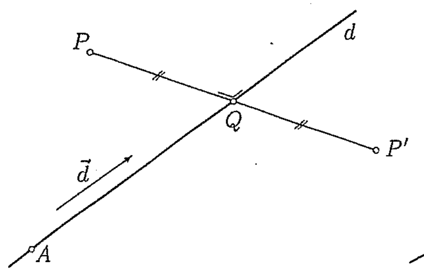
Équations cartésiennes $\quad \dfrac{x - a_1}{d_1} = \dfrac{y - a_2}{d_2} = \dfrac{z - a_3}{d_3}$

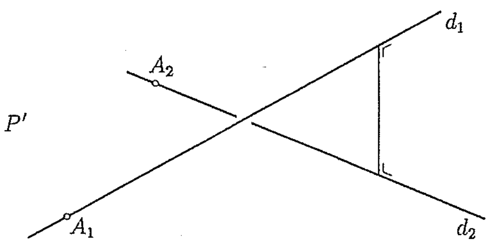
On note P un point et d une droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{d}$.

Distance du point P à la droite d $\quad \delta(P; d) = \dfrac{\|\overrightarrow{AP} \times \vec{d}\,\|}{\|\vec{d}\|}$

Projection orthogonale de P sur d $\quad \overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \dfrac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{d}}{\|\vec{d}\,\|^2}\, \vec{d}$

Symétrique de P par rapport à d $\quad \overrightarrow{OP'} = 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP} + 2\,\dfrac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{d}}{\|\vec{d}\,\|^2}\, \vec{d}$





On note d_1 une droite passant par A_1 et de vecteur directeur $\vec{d_1}$ et d_2 une droite passant par A_2 et de vecteur directeur $\vec{d_2}$.

Distance de deux droites $\quad \delta(d_1; d_2) = \dfrac{\left|(\vec{d_1} \times \vec{d_2}) \cdot \overrightarrow{A_1A_2}\right|}{\|\vec{d_1} \times \vec{d_2}\|}$

Angle aigu de deux droites $\quad \cos(\varphi) = \dfrac{|\vec{d_1} \cdot \vec{d_2}|}{\|\vec{d_1}\|\,\|\vec{d_2}\|} \qquad \sin(\varphi) = \dfrac{\|\vec{d_1} \times \vec{d_2}\|}{\|\vec{d_1}\|\,\|\vec{d_2}\|}$

Dérivée vectorielle

$$\vec{u}\,'(t) = \frac{d\vec{u}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{u}(t + \Delta t) - \vec{u}(t)}{\Delta t}$$

$$\vec{u}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \Longrightarrow \vec{u}\,'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$$

$(\vec{u} + \vec{v})' = \vec{u}\,' + \vec{v}\,'$	$(\vec{u} \cdot \vec{v})' = \vec{u}\,' \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v}\,'$
$\big(f(t)\vec{u}\big)' = f'(t)\vec{u} + f(t)\vec{u}\,'$	$(\vec{u} \times \vec{v})' = (\vec{u}\,' \times \vec{v}) + (\vec{u} \times \vec{v}\,')$

Lorsque t représente le temps, les dérivées se notent aussi $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, $\dot{z}(t)$ et $\dot{\vec{u}}(t)$

Calcul intégral

Primitive

Une fonction F est une *primitive* d'une fonction f dans l'intervalle I si $F'(x) = f(x)$ dans I.

Si F_1 et F_2 sont deux primitives de f sur I, alors $F_2 = F_1 + c$ où c est une constante.
On note $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ une primitive quelconque de f.

Recherche de primitives

Par linéarité	$\int \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$ $\int \lambda f(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx$
Par parties	$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$
Par substitution	$\int g\big(f(x)\big)f'(x)\,dx = G\big(f(x)\big) + c$ où G est une primitive de g
Par changement de variable	$\int g(x)\,dx = \int g\big(f(t)\big)f'(t)\,dt$ où $x = f(t)$ avec f bijective

Dérivée première et croissance

On note f une fonction dérivable sur un intervalle I.

f croissante sur I	$\Leftrightarrow$	$f'(x) \geq 0$ pour tout x de I
f décroissante sur I	$\Leftrightarrow$	$f'(x) \leq 0$ pour tout x de I

Dérivée seconde et convexité

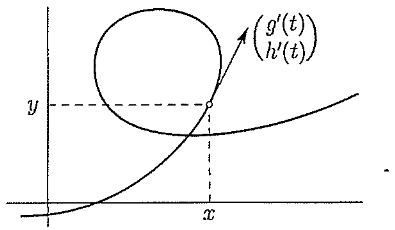
On note f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.

f convexe sur I	$\Leftrightarrow$	$f''(x) \geq 0$ pour tout x de I
f concave sur I	$\Leftrightarrow$	$f''(x) \leq 0$ pour tout x de I

Courbe donnée sous forme paramétrique

Équations paramétriques : $\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}$

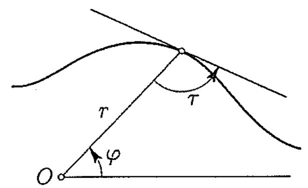
$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{h'(t)}{g'(t)} = m(t)$	$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{m'(t)}{g'(t)}$



Courbe donnée sous forme polaire

Équation polaire : $r = f(\varphi)$
On note τ l'angle entre le rayon vecteur et la tangente.

$$\boxed{\tan(\tau) = \frac{f(\varphi)}{f'(\varphi)}}$$



Rayon de courbure

On note R le rayon de courbure d'une courbe.

Équation cartésienne	$y = f(x)$	$R = \dfrac{\left(1 + f'^2(x)\right)^{\frac{3}{2}}}{\lvert f''(x)\rvert}$
Équations paramétriques	$\begin{cases} x = g(t) \\ y = h(t) \end{cases}$	$R = \dfrac{\left(g'^2(t) + h'^2(t)\right)^{\frac{3}{2}}}{\lvert g'(t)h''(t) - g''(t)h'(t)\rvert}$
Équation polaire	$r = f(\varphi)$	$R = \dfrac{\left(f^2(\varphi) + f'^2(\varphi)\right)^{\frac{3}{2}}}{\lvert f^2(\varphi) + 2f'^2(\varphi) - f(\varphi)f''(\varphi)\rvert}$

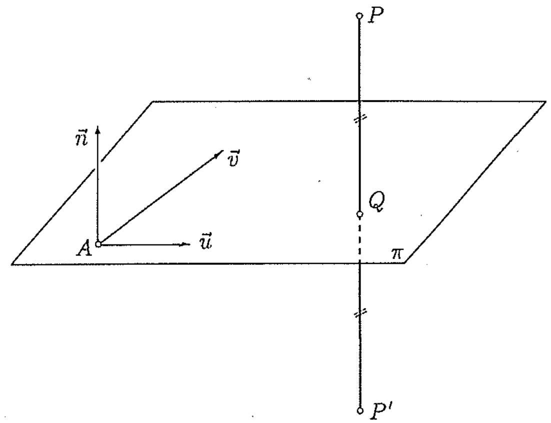
Plan

On note π un plan passant par le point $A(a_1; a_2; a_3)$ et de vecteurs directeurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Le vecteur $\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un *vecteur normal* au plan π.

Un point $P(x\,;y\,;z)$ appartient au plan π si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

Équation vectorielle	$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$	$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
Équations paramétriques	$\begin{cases} x = a_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = a_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = a_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases}$	$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
Équation cartésienne	$a\,x + b\,y + c\,z + d = 0$	
Autres formes	$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$ $\mathrm{Det}(\overrightarrow{AP}; \vec{u}; \vec{v}) = 0$	

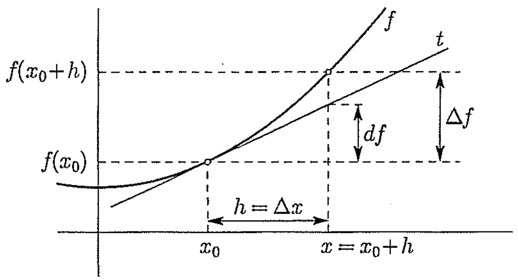


On note $P(x_0\,;y_0\,;z_0)$ un point et π un plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$

Distance du point P au plan π	$\delta(P;\pi) = \dfrac{\lvert ax_0 + by_0 + cz_0 + d\rvert}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$
Projection orthogonale de P sur π	$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} - \dfrac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}}{\lVert \vec{n} \rVert^2}\,\vec{n}$
Symétrique de P par rapport à π	$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} - 2\,\dfrac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}}{\lVert \vec{n} \rVert^2}\,\vec{n}$

Calcul différentiel

Dérivée d'une fonction



Dérivée de f en x_0

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Le nombre $f'(x_0)$ est la pente de la tangente à la courbe en $(x_0\,;f(x_0))$

Autres formes :

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Autres notations :

Si $y = f(x)$, alors $f'(x) = \dfrac{df}{dx} = \dfrac{dy}{dx} = y'$

Différentielle de f en x_0 $\quad df = f'(x_0)\,\Delta x$

Tangente t en x_0 $\quad y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Fonction dérivée $\quad f' : x \mapsto f'(x)$

Dérivée seconde $\quad f'' = (f')'$

Autres notations :

Si $y = f(x)$, alors $f''(x) = \dfrac{d^2 f}{dx^2} = \dfrac{d^2 y}{dx^2} = y''$

Règles de dérivation

$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$	$(\lambda \cdot f)'(x) = \lambda f'(x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$
$(f \cdot g)'(x) = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x)$	$(g \circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x)$
$\left(\dfrac{f}{g}\right)'(x) = \dfrac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$	$({}^{r}f)'(x) = \dfrac{1}{f'\big({}^{r}f(x)\big)}$

Dérivée de fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	
a	0	$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	
x	1	$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	
x^n	nx^{n-1}	$\lvert x\rvert$	$\operatorname{sgn}(x)$	$x \neq 0$
e^x	e^x	$\ln(x)$	$\dfrac{1}{x}$	
a^x	$a^x \ln(a)$	$\log_a(x)$	$\dfrac{1}{x\ln(a)}$	
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\arcsin(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\arccos(x)$	$-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\tan(x)$	$\dfrac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\arctan(x)$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	
$\cot(x)$	$-\dfrac{1}{\sin^2(x)} = -1 - \cot^2(x)$	$\operatorname{arccot}(x)$	$-\dfrac{1}{1+x^2}$	
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\operatorname{arsinh}(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$	
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\operatorname{arcosh}(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	
$\tanh(x)$	$\dfrac{1}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$	$\operatorname{artanh}(x)$	$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\lvert x\rvert < 1$
$\coth(x)$	$-\dfrac{1}{\sinh^2(x)} = 1 - \coth^2(x)$	$\operatorname{arcoth}(x)$	$\dfrac{1}{1-x^2}$	$\lvert x\rvert > 1$

Théorèmes

Théorème des accroissements finis

Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a\,;b]$ et dérivable sur l'intervalle $]a\,;b[$, alors il existe au moins un nombre c dans $]a\,;b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$