Exercice 1 (environ 9 points)

(a) À partir de la définition du nombre dérivé de f en a, déterminer $f'(a)$ pour la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{3}{x^2}$

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{3}{(a+h)^2} - \frac{3}{a^2}}{h}$$

1/1 def

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3a^2 - 3(a+h)^2}{(a+h)^2 \cdot a^2} \cdot \frac{1}{h}$$

1/1 dénom

1/1

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3a^2 - 3(a^2+2ah+h^2)}{(a+h)^2 \cdot a^2 \cdot h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{3a^2} - \cancel{3a^2} - 6ah - 3h^2}{(a+h)^2 \cdot a^2 \cdot h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{h}(-6a-3h)}{(a+h)^2 a^2 \cancel{h}}$$

1/3 fact simpl.

$$= \frac{-6a - 3\cdot 0}{(a+0)^2 \cdot a^2} = \frac{-6a}{a^2 \cdot a^2} = \frac{-6a}{a^4} = \frac{-6}{a^3}$$

1/1 lim

(b) Vérifier votre résultat avec les formules de dérivation.

$$\left(\frac{3}{x^2}\right)' = 3\left(\frac{1}{x^2}\right)' = 3\cdot\left[\frac{-(x^2)'}{(x^2)^2}\right] = 3\left[-\frac{2x}{x^4}\right] = \frac{-6}{x^3}$$

1/3

Exercice 2 (environ 6 points)

Calculer les dérivées des fonctions f suivantes définies par :
(les résultats ne doivent contenir aucun exposant fractionnaire ou négatif)

(a) $f_1(x)=(x^3-8)^4$

$$[(x^3-8)^4]' = 4(x^3-8)^3\cdot(x^3-8)'$$
$$= 4(x^3-8)^3\cdot 3x^2$$
$$= 12x^2(x^3-8)^3$$

/3

(b) $f_2(x)=x\sqrt{x}+\frac{x^2}{4x^3}$

$$\left(x\sqrt{x}+\frac{x^2}{4x^3}\right)' = \left(x x^{1/2}+\frac{1}{4x}\right)' = (x^{3/2})' + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x}\right)'$$
$$= \frac{3}{2}x^{3/2-1} + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$
$$= \frac{3}{2}x^{1/2} - \frac{1}{4x^2}$$
$$= \frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{4x^2}$$

/3

Exercice 3 (environ 19 points)

Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{2x^2-8}{(x-1)^2}$

(a) ~~Quel est son~~ Dét. le domaine de définition ? et l'ens. des zéros

• pb si $(x-1)^2=0 \Leftrightarrow x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ /1

• $f(x)=0 \Leftrightarrow 2x^2-8=0 \Leftrightarrow 2(x^2-4)=0 \Leftrightarrow 2(x-2)(x+2)=0$

$Z_f=\{\pm 2\}$ /1

(b) Donner le tableau de signes de f.

x		-2		$+1$		2	
$2(x^2-4)$	+	0	−	−	−	0	+
$(x-1)^2$	+	+	+	0	+	+	+
$f(x)$	+	0	−	‖	−	0	+

/1

(c) Déterminer toutes les asymptotes de la courbe représentative de f (réponses justifiées).

as. verticale :

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{2(x^2-4)}{(x-1)^2}=\dfrac{2\cdot(-3)}{(0^-)^2}=\dfrac{-6}{0+}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2(x^2-4)}{(x-1)^2}=\dfrac{2(-3)}{(0+)^2}=\dfrac{-6}{0+}=-\infty$

donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=-\infty$ et $x=1$ est as. vert de f

/2

as. horizontale

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2x^2-8}{x^2-2x+1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\cancel{x^2}(2-8/x^2)}{\cancel{x^2}(1-2/x+1/x^2)}=\dfrac{2}{1}=2$

donc $y=2$ est as. horizontale de f à $\pm\infty$

/2

(d) Montrer que $f'(x)=\dfrac{16-4x}{(x-1)^3}$

$$\left(\frac{2x^2-8}{(x-1)^2}\right)' = \frac{4x(x-1)^2-(2x^2-8)\left[(x-1)^2\right]'}{\left[(x-1)^2\right]^2} = \frac{4x(x-1)^2-2(x^2-4)2(x-1)\cdot 1}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{4(x-1)\left[x(x-1)-(x^2-4)\right]}{(x-1)^4} = \frac{4\cancel{(x-1)}\left[\cancel{x^2}-x-\cancel{x^2}+4\right]}{(x-1)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{4[4-x]}{(x-1)^3} = \frac{16-4x}{(x-1)^3}$$

4

N.B. Utiliser dans tous les cas le résultat donné ci-dessus pour traiter les questions suivantes !

(e) Donner le tableau des variations de f (croissance – décroissance).

x		1		4	
$16-4x$	+	+	+	0	−
$(x-1)^3$	−	0	+	+	+
$f'(x)$	−	∄	+	0	−
$f(x)$	↘		↗	Max	↘

3

(f) Déterminer le(s) extrema de f (abscisse et ordonnée).

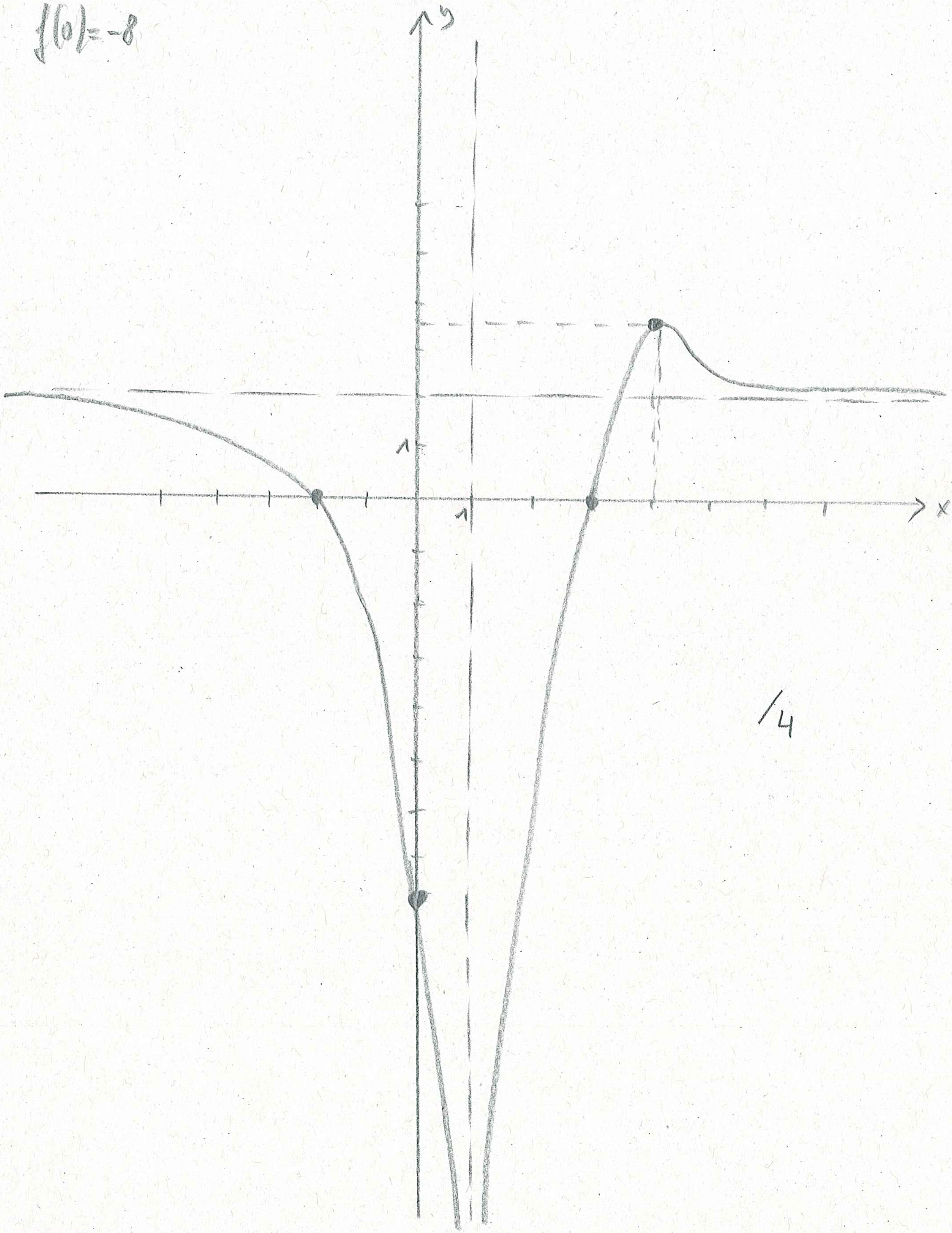
$$f(4) = \frac{2\cdot 4^2-8}{(4-1)^2} = \frac{24}{9}$$

maximum: $\left(4;\frac{24}{9}\right)=\left(4;\frac{8}{3}\right)$

1

(g) Esquisser une représentation graphique de la fonction f aussi précise que possible en cohérence avec les résultats obtenus.

$f(0) = -8$



/4

Exercice 4 (environ 11 points)

On considère la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x}$.

(a) Déterminer l'équation de la tangente t_1 à la courbe représentative de f au point $(4;2)$.

Équation de t : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ avec $a = 4$

$f(a) = f(4) = 2$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$

d'où : $y = \frac{1}{4}(x-4) + 2 = \frac{1}{4}x - 1 + 2 = \frac{1}{4}x - 1$

ou $y = px + q$ avec $p = f'(4) = \dots = \frac{1}{4}$

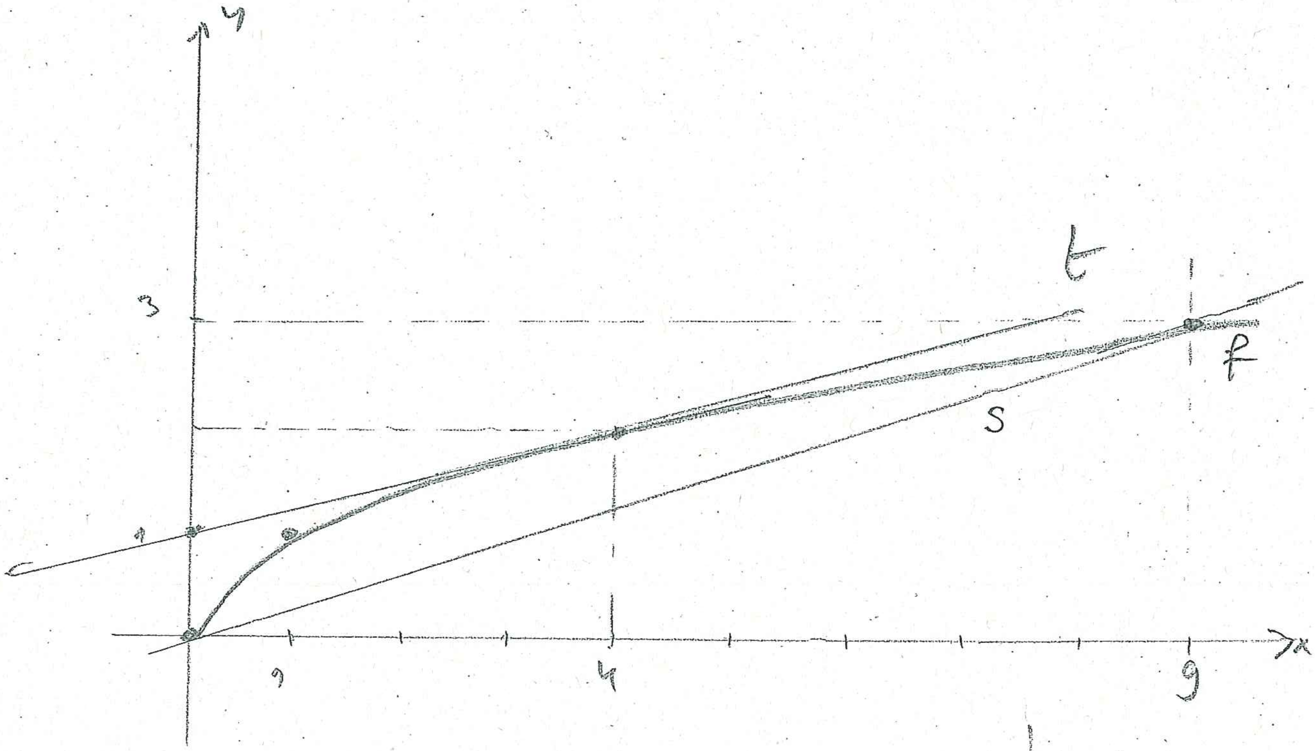
d'où $y = \frac{1}{4}x + q$

$(4;2) \in t \Leftrightarrow 2 = \frac{1}{4} \cdot 4 + q \Leftrightarrow q = 2 - 1 = 1$

$t : y = \frac{1}{4}x + 1$

/4

(b) Représenter graphiquement f et t_1 sur un même repère pour $x \in [0;10]$



/2

(c) Calculer la pente de la droite sécante s qui coupe la courbe représentative de f aux points d'abscisse $x=0$ et $x=9$.

les 2 points : $(0; f(0)) = (0; 0)$
$(9; f(9)) = (9; 3)$

pente $= \frac{3-0}{9-0} = \frac{1}{3}$

/1

(d) En quel point du graphe de f la tangente t_2 est-elle parallèle à cette droite sécante s? Justifier !

$t_2 \parallel s \Leftrightarrow$ mêmes pentes

$\Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{3}$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 3$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{9}{4}$

/1

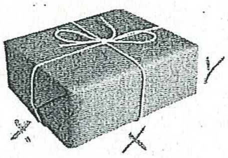
/2

le point est $\left(\frac{9}{4}; f\left(\frac{9}{4}\right)\right) = \left(\frac{9}{4}; \sqrt{\frac{9}{4}}\right) = \left(\frac{9}{4}; \frac{3}{2}\right)$

/1

Exercice 5 (environ 10 points)

La poste entend imposer des normes d'encombrement pour les paquets de Noël. Quelles sont les dimensions d'un colis de la forme d'un parallélépipède rectangle de base carrée et de volume maximum que l'on puisse expédier, si la somme de la hauteur et du périmètre de la base est égale à 2,70 mètres ?



x : côté de la base
y : hauteur

à optimiser : volume $V = x^2 y$ /1

on sait : $y + 4x = 2,7 \Leftrightarrow y = 2,7 - 4x$ /2

d'où $f(x) = x^2(2,7-4x) = 2,7x^2 - 4x^3$ /1

$f'(x) = 5,4x - 12x^2 = -x(12x - 5,4)$ /1

$Z_{f'} = \{0 ; \frac{5,4}{12}\} = \{0 ; 0,45\}$ /2

x		0		0,45	
$-x$	+	0	−	−	−
$12x-5,4$	−	−	−	0	+
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	min	↗	max	↘

pas intéressant pour le problème

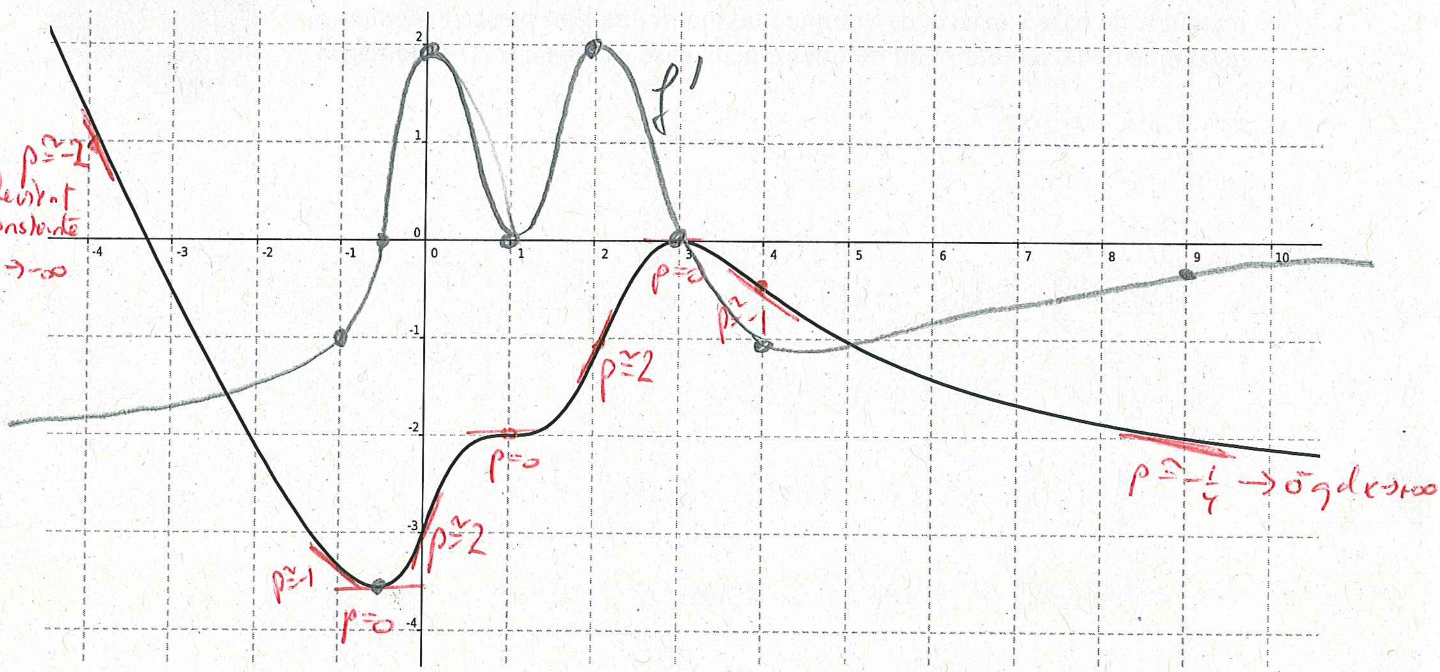
/2

Volume maximum si $x = 0,45$ [m]
$y = 2,7 - 4 \cdot 0,45 = 0,9$ [m]

/1

Exercice 6 (environ 6 points)

On considère ci-dessous une représentation graphique d'une fonction f. Construire sur le même repère une représentation graphique aussi précise que possible de la dérivée f' de f :



extrema : /1

pt critique en 1 : /1

~ asymptotes à ±∞ : /1

signes de $f'(x)$: /2

valeurs intéressantes estimées : /1

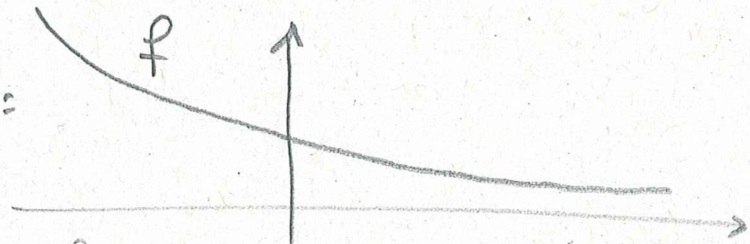
Exercice 7 (environ 6 points)

VRAI ou FAUX ? Justifier vos réponses.

(a) Si f est dérivable et positive sur un intervalle I, alors f' est croissante sur I.

Faux

Contre-exemple :



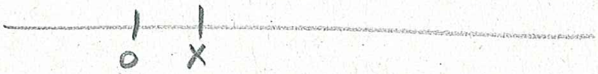
f dérivable positive

f décroissante $\Rightarrow f' < 0$

/3

(b) Il n'existe pas de nombre réel strictement positif qui soit plus proche de 0 que tous les autres.

Vrai



dém. par l'absurde

Supposons qu'un tel x existe ;
alors on aurait $\frac{x}{2}$ qui serait strictement compris entre 0 et x, donc $\frac{x}{2} \neq x$ serait un nombre encore plus proche de 0 et donc contredirait la définition de x

/3