Approche des nombres complexes

1. **Racine négative !!!**

Imaginons un nombre dont le carré soit égal à -1 …

Appelons le i …

On aurait alors $i^2=-1$ … et aussi $(-i)^2=-1$

L'équation $x^2=-1$, ou encore $x^2+1=0$ aurait deux solutions $x_1=-i$ et $x_2=i$ …

et on pourrait factoriser $x^2+1=(x-i)(x+i)$

vérification : $(x-i)(x+i)=x^2-i^2=x^2-(-1)=x^2+1$

2. **Une autre ?**

Considérons l'équation $x^2+4=0$ ...

$\Delta=b^2-4ac=0^2-4\cdot 1\cdot 4=-16$ et $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{\pm\sqrt{-16}}{2}$ ...

où $\pm\sqrt{-16}$ seraient des nombres dont le carré vaut -16 …

Comme $(4i)^2=4^2 i^2=16\cdot(-1)=-16$ … et aussi $(-4i)^2=-16$ …on en déduirait que

$x_{1,2}=\dfrac{\pm 4i}{2}=\pm 2i$, c'est-à-dire que $x_{1,2}=\pm 2i$ seraient deux solutions de $x^2+4=0$

vérification : $(\pm 2i)^2+4=(2i)^2+4=2^2 i^2+4=4\cdot(-1)+4=0$

et on pourrait factoriser $x^2+4=(x-2i)(x+2i)$

vérification : $(x-2i)(x+2i)=x^2-(2i)^2=x^2-2^2 i^2=x^2-4\cdot(-1)=x^2+4$

3. **Et encore...**

Considérons l'équation $x^2+x+1=0$ ...

$\Delta=-3$ et $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\cdot i}{2}$ … car $(\pm\sqrt{3}\cdot i)^2=(\pm\sqrt{3})^2\cdot i^2=3\cdot(-1)=-3$

d'où $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}\cdot i}{2}$ seraient deux solutions de $x^2+x+1=0$

et on pourrait factoriser $x^2+x+1=0=\left(x-\dfrac{-1-\sqrt{3}\cdot i}{2}\right)\left(x+\dfrac{-1+\sqrt{3}\cdot i}{2}\right)$

4. **Oups !**

Pourtant nous avons bien appris jusque-là que les racines négatives n'existent pas !

Ces résistances ont été exprimées fortement lorsque les premiers mathématiciens ont « osé » effectuer ce type de calcul ...

5. Les défricheurs (un peu d'histoire...)

a) *« Essaie de diviser 10 en deux parties, de telle sorte que l'une multipliée par l'autre produise 30 ou 40, il est évident qu'un tel cas est impossible. Pourtant, nous allons le résoudre de cette façon ... »*

Girolamo Cardano (1501-1576)

La solution de Cardano était la suivante :

$$(5+\sqrt{-15})\cdot(5-\sqrt{-15}) = 5^2-(\sqrt{-15})^2=25-(-15)=40$$

et il conclut : *« **Cette subtilité résultant de l'arithmétique est, comme je l'ai dit, aussi subtile qu'elle est inutile** ».*

[aujourd'hui on écrirait

$$(5+\sqrt{15}\,i)\cdot(5-\sqrt{15}\,i)=5^2-(\sqrt{15}\,i)^2=25-(\sqrt{15})^2\,i^2=25-15(-1)=40 \;]$$

b) « [j'affirme que] $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$ »

Leibnitz, 1673, Lettre à Huygens

Commentaire de Leibnitz : *« **Je ne me souviens pas d'avoir rencontré un fait aussi singulier et paradoxal dans toute l'analyse** : je pense être le seul à avoir réduit des racines irrationnelles, imaginaires dans leur forme, à des grandeurs réelles ».*

Réponse de Huygens : *« La remarque que vous m'avez faite concernant les racines pouvant être extraites et les racines comportant des grandeurs imaginaires qui engendrent, par l'addition, une grandeur réelle, est **surprenante** et **complètement nouvelle**. Personne n'aurait jamais cru que $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}$ soit égal à $\sqrt{6}$, et **il y a en cela quelque chose de caché qui nous est incompréhensible** »*

Leibnitz encore, plus tard, toujours sur le même sujet : *« **le nombre imaginaire est un ressort fin et merveilleux de la raison divine, quasiment un amphibien entre l'être et le non-être** ».*

aujourd'hui on justifierait ainsi :

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+\sqrt{3}\,i}+\sqrt{1-\sqrt{3}\,i}\overset{?}{=}\sqrt{6} &\Leftrightarrow [\sqrt{1+\sqrt{3}\,i}+\sqrt{1-\sqrt{3}\,i}]^2\overset{?}{=}[\sqrt{6}]^2\\
&\Leftrightarrow [\sqrt{1+\sqrt{3}\,i}+\sqrt{1-\sqrt{3}\,i}]^2\overset{?}{=}[\sqrt{6}]^2\\
&\Leftrightarrow [(1+\sqrt{3}\,i)+2\sqrt{1+\sqrt{3}\,i}\sqrt{1-\sqrt{3}\,i}+(1-\sqrt{3}\,i)]\overset{?}{=}6\\
&\Leftrightarrow [(1+\sqrt{3}\,i)+2\sqrt{(1+\sqrt{3}\,i)(1-\sqrt{3}\,i)}+(1-\sqrt{3}\,i)]\overset{?}{=}6\\
&\Leftrightarrow [(1+\sqrt{3}\,i)+2\sqrt{(1^2-(\sqrt{3}\,i)^2)}+(1-\sqrt{3}\,i)]\overset{?}{=}6\\
&\Leftrightarrow [(1+\sqrt{3}\,i)+2\sqrt{(1^2-3i^2)}+(1-\sqrt{3}\,i)]\overset{?}{=}6\\
&\Leftrightarrow [(1+\sqrt{3}\,i)+2\sqrt{(1^2-3(-1))}+(1-\sqrt{3}\,i)]\overset{?}{=}6\\
&\Leftrightarrow [(1+\sqrt{3}\,i)+2\sqrt{4}+(1-\sqrt{3}\,i)]\overset{?}{=}6\\
&\Leftrightarrow [1+\sqrt{3}\,i+4+1-\sqrt{3}\,i]\overset{?}{=}6\\
&\Leftrightarrow [1+4+1]\overset{?}{=}6 \qquad \textit{cqfd}
\end{aligned}$$

c) Leibnitz toujours, plus tard, sur le même sujet : *« L'on peut sans inquiétude utiliser des lignes fines et larges comme* ***concepts idéaux*** *– même si elles n'existent pas en tant qu'objets réels dans le sens métaphysiquement strict – comme manière de simplifier les calculs, exactement comme on peut utiliser des racines imaginaires dans l'analyse ordinaire, comme* $\sqrt{-2}$ *par exemple.* ***Nonobstant le fait que ces grandeurs soient qualifiées « d'imaginaires », elles sont néanmoins utiles et même quelquefois indispensables dans nos tentatives d'exprimer des grandeurs réelles dans l'analyse*** *[...]. »*

Lettre à Varignon, 1702

d) « *[...]* ***de telles expressions****, comme la racine carrée de -1, ou la racine carrée de -2,* ***sont par conséquent impossibles et correspondent donc à des nombres imaginaires****, puisqu'elles représentent des racines de quantités négatives ; et nous pouvons véritablement affirmer que* ***de tels nombres ne sont ni rien, ni plus grands que rien, ni plus petits que rien, ce qui fait d'eux des nombres imaginaires ou impossibles*** »

Euler

e) «*La difficulté qui entoure, comme on l'a souvent cru, la théorie des grandeurs imaginaires, repose dans une large mesure sur cette désignation plutôt inadéquate (on leur a même collé le terme discordant de grandeur impossible). Si on était parti de la volonté de présenter une variété de deux dimensions [...], les grandeurs positives auraient été appelées directes, les grandeurs négatives inverses et les grandeurs imaginaires latérales, et l'on retrouverait la simplicité au lieu de la confusion, la clarté au lieu de l'obscurité [...]*»

Gauss

Source: Fusion n°101, mai-juin 2000

6. Osons !

Osons donc nous aussi ...

Nombres complexes

On appelle **nombre complexe** une expression du type $z = x + yi$ où x et y sont deux nombres réels quelconques.

x s'appelle la partie réelle de z et on note $x = \mathrm{Re}(z)$.
y s'appelle la partie imaginaire de z est y et on note $y = \mathrm{Im}(z)$.

L'ensemble des nombres complexes se note $\mathbb{C}$.

Exemples :

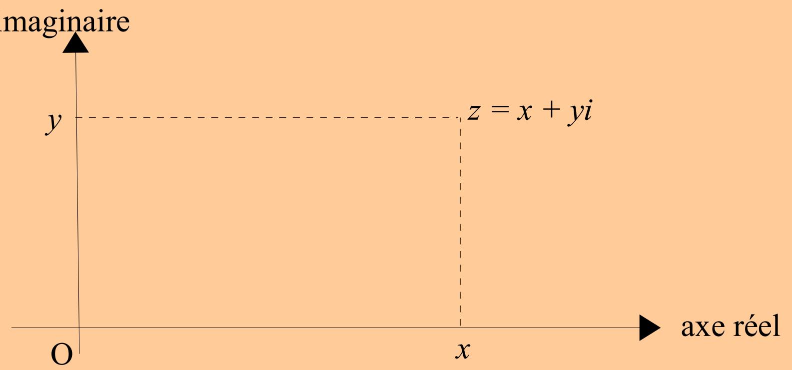
a) $2+3i, -4+8i, \sqrt{2}+9i, \frac{2}{3}-8i, 1+i, -1-2i$ sont des nombres complexes

b) quand y est négatif, on note plus simplement, par exemple : $2+(-3)i = 2-3i$

c) $-3\mathrm{i}, -3$ sont aussi des nombres complexes : $-3\mathrm{i} = 0-3i, -3 = -3+0i$

7. **Représentation graphique d'un nombre complexe** $z = x + yi$

Un nombre complexe peut être représenté dans le plan :



Représenter les nombres complexes suivants :

$z_1 = 1 + i,\ z_2 = 2 + 2i,\ z_3 = -3 + 3i,\ z_4 = -4 - 4i,\ z_5 = 5 - 5i,\ z_6 = 2,\ z_7 = -i$

8. **Opérations de base dans** $\mathbb{C}$

Soient $z = x + yi$ et $w = u + vi$ deux nombres complexes, et $\alpha \in \mathbb{R}$.

On définit :

$z + w = (x + yi) + (u + vi) \overset{déf}{=} (x + u) + (y + v)i$ [addition de deux complexes]

$z - w = (x + yi) - (u + vi) \overset{déf}{=} (x - u) + (y - v)i$ [soustraction de deux complexes]

$\alpha \cdot z = \alpha \cdot (x + yi) \overset{déf}{=} (\alpha x) + (\alpha y)i$ [multiplication d'un complexe par un scalaire]

$z \cdot w = (x + yi) \cdot (u + vi) \overset{déf}{=} (xu - yv) + (xv + yu)i$ [multiplication de deux complexes]

Soient $z = 2 + 3i,\ w = -4 + 2i,\ u = -1 - i$ et $v = -5 - 4i$.

Effectuer les opérations suivantes : $z + w,\ 2u - 3v,\ -w,\ zw,\ -3vu$.

9. Remarque fondamentale

L'addition et la soustraction de deux nombres complexes ainsi que la multiplication d'un nombre complexe par un scalaire sont définies « naturellement ». Par contre, la multiplication de deux nombres complexes n'est pas celle qu'on attend …

Ce choix se justifie de deux façons :

- d'une part, ce choix ne fait qu'étendre à $\mathbb{C}$ la notion de double distributivité issue de $\mathbb{R}$: $$\begin{aligned} z \cdot w &= (x + yi) \cdot (u + vi) \\ &= xu + yiu + xvi + yivi \\ &= xu + yui + xvi + yvi^2 \\ &= xu + yui + xvi + yv(-1) \\ &= xu - yv + (yu + xv)i \end{aligned}$$
- d'autre part, si on note $i = 0 + 1i$, alors on obtient, dans $\mathbb{C}$: $$i^2 = (0 + 1i)^2 = (0 + 1i) \cdot (0 + 1i) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + (0 \cdot 1 + 1 \cdot 1)i = -1 + 0i = -1$$

i est donc un nombre (complexe) dont le carré est négatif. C'est l'une des propriétés remarquables de ces nouveaux nombres : il existe des carrés négatifs ! Et ceci va beaucoup servir par la suite …

En effet, de l'égalité $i^2=-1$, on déduit que i est solution - dans $\mathbb{C}$ - de l'équation $z^2=-1$. De même $(-i)^2=-1$, d'où $z^2=-1$ (ou $z^2+1=0$) admet deux solutions z = i et z = -i.

Et on peut aussi factoriser : $z^2+1=(z-i)(z+i)$

Les nombres complexes permettent ainsi de trouver des solutions à des équations qui n'en n'ont pas dans $\mathbb{R}$!

10.Equations dans $\mathbb{C}$

Résoudre dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2=z+1$ b) $z^2=z-1$ c) $z^3+1=0$ d) $z^4-1=0$

11.Théorème fondamental de l'algèbre (Gauss)

Théorème

Soit $P(z)=a_n z^n+a_{n-1} z^{n-1}+...+a_2 z^2+a_1 z+a_0$ un polynôme complexe de degré n à coefficients réels (càd $a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ des constantes et $z \in \mathbb{C}$ une variable).

Alors P a exactement n racines (en comptant plusieurs fois les racines multiples).

Remarque : le terme “racine“ est synonyme dans ce contexte de “zéro“.

12.Les nombres complexes sont essentiels à la compréhension de la structure de la matière à petite échelle (mécanique quantique) comme à grande échelle (théorie de la relativité), ainsi qu'en mécanique des fluides, en électronique, en électromagnétique, ...

13.Remarques

a) On connaît la formule de Viète pour résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations de degré 2 ; on peut adapter cette formule pour résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations de degré 2 à coefficients réels.

b) Il existe une formule du même type, dite formule en radicaux car elle n'utilise que les quatre opérations de base et les racines carrées, pour résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations de degré 3 à coefficients réels. Il est assez extraordinaire de voir que pour résoudre certaines équations de degré 3, on doit quitter l'ensemble $\mathbb{R}$ pour travailler dans $\mathbb{C}$ pour ensuite revenir avec nos solutions dans $\mathbb{R}$!

c) Il existe une formule du même type – quoique plus compliquée... - pour résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations de degré 4 à coefficients réels.

d) Et pour une équation du 5e degré ? Après ces découvertes, de nombreux mathématiciens, dont Leibnitz, ont tenté de généraliser ces formules pour les équations de degré 5 et plus. Ce n'est qu'avec le développement d'une branche nouvelle des mathématiques, l'algèbre, et plus particulièrement la théorie des groupes (Lagrange 1770, Galois 1832), que le problème pourra être résolu.

Abel prouvera en 1826 (à l'âge de 24 ans !) le :

Théorème
Il n'existe pas de "formule en radicaux" qui permette de résoudre les équations de degré supérieur ou égal à 5 !

Pour résoudre une équation de degré supérieur ou égal à 5, il faut donc procéder au cas par cas, et souvent avoir recours au calcul numérique (approximation de la solution avec estimation de l'erreur).

14. Quelques sujets de recherche « bonus :

a) L'histoire des « compétitions » au XVIe siècle pour résoudre des équations de plus en plus compliquées et la découverte de formules générales.

b) La formule de Tartaglia-Cardano pour résoudre les équations de degré 3 à coefficients réels : explications, exemples.

c) Le théorème fondamental de l'algèbre et Gauss.