Travail intermédiaire de mathématiques n°1

Date : 12 octobre 2010

Durée : 90 minutes

Enseignant : Jean-Marie Delley

Cours : 4Ma1DF5

Nom: ....

Prénom: ....

Groupe: ....

Matériel autorisé

- Calculatrice personnelle TI82

Remarques

- Il ne suffit pas de répondre par un nombre ou par oui ou par non; il est important de justifier les réponses et de donner tous les détails des calculs.
- Si vous utilisez la calculatrice pour déterminer directement un résultat, indiquez-le par un « C »!
- Indiquez vos initiales en haut de chaque page

Informations chiffrées après correction du maître

Notations (une coche par faute) :

Fautes :	→ .... / ....

Français (une coche par faute) [bonus] :

Fautes :	→ .... / ....

Total des points des exercices : .... / ....

Total des points de l'épreuve : .... / ....

Note : / 6

Note du corrigé: / 6

Crédit obtenu avec ce corrigé :

Crédit éventuel d'un corrigé précédent :

Note finale du travail: / 6

Informations relatives au corrigé du travail par l'élève

- sur des feuilles A4 au format paysage, sur 3 colonnes et pour chaque erreur, l'élève:

dans la colonne 1: recopie l'erreur	dans la colonne 2: explique en quoi c'est faux (et non pourquoi c'est faux !)	dans la colonne 3: corrige l'erreur

- le maître corrige le corrigé et lui attribue une note indicative qui n'entre pas en compte dans le calcul de la moyenne; par contre:
  - si la note du corrigé est 5.5 ou 6 : la note du travail est augmentée de 0.5
  - si la note du corrigé est 4.5 ou 5 : la note du travail n'est pas modifiée et un crédit de 0.25 est à valoir pour le prochain processus d'évaluation de type «épreuve 90' »
  - si la note du corrigé est inférieure ou égale à 4 : la note du travail n'est pas modifiée
- informations complémentaires sur http://math.bibop.ch/generalites/evaluation/corriges-d-epreuves

Début du travail

Exercice 1 (environ 10 points)

Déterminer une primitive F pour chacune des fonctions f définies ci-dessous; donner les réponses simplifiées au maximum et sans exposant négatif ou fractionnaire:

(a) $f(x)=2x^5-\frac{2}{5}x$

(b) $f(x)=\sqrt{1-x}$

(c) $f(x)=18x^4(2-x^5)^8$

(d) $f(x)=\frac{x}{(x^2-2)^2}$

(e) $f(x)=\sin(3x+4)$

(f) $f(x)=\frac{10}{(2x)^3}$

(g) $f(x)=\sqrt{\sin(x)}\cos(x)$

Exercice 2 (environ 9 points)

On considère les fonctions f, g et h définies par $f(x)=x+1$, $g(x)=-2x-2$ et $h(x)=4x-8$

(a) Représenter graphiquement f, g et h dans un même repère en déterminant les différents points d'intersection.

(b) Calculer l'aire de la surface délimitée par les représentations graphiques de f, g et h

Exercice 3 (environ 5 points)

Déterminer toutes les asymptotes de la fonction f définie par $f(x)=\frac{x^3+x^2-6x}{2x^2-8}$.

Exercice 4 (environ 6 points)

Vrai ou faux? Justifier.

(a) Toute fonction f est intégrable

(b) Toute fonction dérivable f est intégrable

(c) Une intégrale est une aire

(d) Si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe (dans $\mathbb{R}$), alors f est continue en a

Exercice 5 (environ 10 points)

Soit $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^2$.

On calcule ci-dessous $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ à l'aide de la définition de l'intégrale.

Pour chaque [….............................], compléter directement sur l'énoncé ce qui manque.

Début du calcul

On partage [….....................] en n intervalles équidistants de longueur $\frac{1}{n}$ et on note $\Delta x=$ [….........................]

On pose : $x_0=0$

$x_1=0+\Delta x$ [….........................]

$x_2=0+2\Delta x=$[….........................]

...

$x_{n-1}=0+(n-1)\Delta x=$[….........................]

$x_n=0+n\Delta x=$[….........................]

On calcule la **somme des aires des grands rectangles** :

$$\begin{aligned}
S_n &= \Delta x f(x_1)+\Delta x f(x_2)+\Delta x f(x_3)+\ldots+\Delta x f(x_n)\\
&= \frac{1}{n}f(\frac{1}{n})+\frac{1}{n}f(2\frac{1}{n})+\frac{1}{n}f(3\frac{1}{n})+\ldots+\frac{1}{n}f(n\frac{1}{n})\\
&= \frac{1}{n}(\frac{1}{n})^2+\frac{1}{n}([\ldots\ldots\ldots\ldots])^2+\frac{1}{n}(3\frac{1}{n})^2+\ldots+[\ldots\ldots\ldots\ldots](n\frac{1}{n})^2\\
&= \frac{1}{n}(\frac{1}{n})^2+\frac{1}{n}(\frac{2}{n})^2+\frac{1}{n}(\frac{3}{n})^2+\ldots+\frac{1}{n}(\frac{n}{n})^2\\
&= \frac{1}{n}(\frac{1}{n})^2([\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots])\\
&= [\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots]
\end{aligned}$$

Dans la table numérique, on trouve la formule suivante:

$$\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

On obtient alors:

$$S_n = [\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots]$$

On calcule la **somme des aires des petits rectangles** de façon identique et on trouve:

$$s_n = \frac{1}{n^3}\left(0^2+1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2\right)$$

Dans la même formule qu'au cas précédent, on substitue n par n-1 et on obtient:

$$\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2\right)=\frac{[\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots]}{6}=\frac{[\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots]}{6}$$

Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{[\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots]}{6\,n^3}=[\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots]$$

De même $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n=\frac{1}{3}$

On avait $s_n\leqslant A\leqslant S_n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n\leqslant A\leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

C'est-à-dire : $\frac{1}{3}\leqslant A\leqslant[\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots]$, donc $\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=[\ldots\ldots\ldots\ldots]$

Exercice 6 (environ 2 points)

On considère le Théorème de Newton-Leibnitz

(a) L'énoncer complètement sous la forme « Si …. alors ... »

(b) Expliquer en quoi il est si important

(c) [Facultatif: max: environ + 3 points] Le démontrer.