Ma 4N Corrigé travail n° 1

1. a) $F(x) = 2\frac{x^6}{6} - \frac{2}{5}\frac{x^2}{2} = \frac{x^6}{3} - \frac{x^2}{5}$ (3)

[/23] b) $f(x) = \sqrt{1-x} = (1-x)^{1/2} = -\left[(-1)(1-x)^{1/2}\right]$

$\Rightarrow F(x) = -\frac{\left[(1-x)^{3/2}\right]}{3/2} = -\frac{2}{3}\sqrt[2]{(1-x)^3}$ (4)

c) $f(x) = 18x^4 \cdot (2-x^5)^8 = 18\left(\frac{-1}{5}\right)\left[(-5x^4)(2-x^5)^8\right]$

$\Rightarrow F(x) = -\frac{18}{5}\left[\frac{(2-x^5)^9}{9}\right] = -\frac{2}{5}(2-x^5)^9$ (4)

d) $f(x) = \frac{-1}{2}\left[2x \cdot (x^2-2)^{-2}\right]$

$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}\frac{(x^2-2)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2-2}\right)$ (3)

e) $f(x) = \frac{1}{3}\left[3\sin(3x+4)\right]$

$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{3}\left[-\cos(3x+4)\right]$ (3)

f) $f(x) = \frac{10}{8x^3} = \frac{10}{8} \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{10}{8}x^{-3} = \frac{5}{4}x^{-3}$

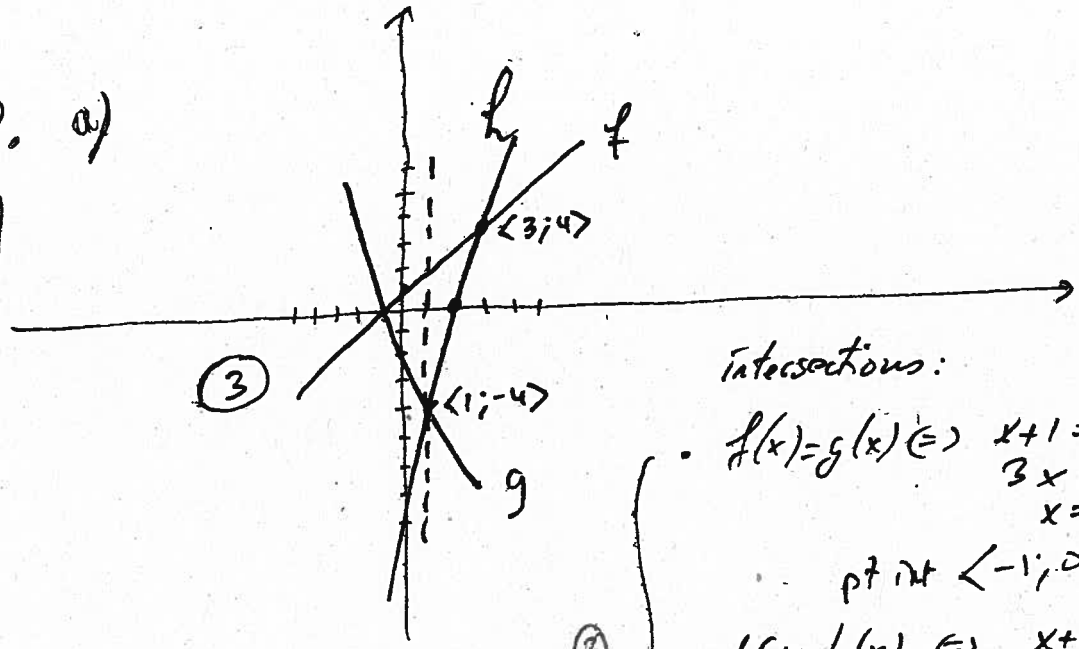
$\Rightarrow F(x) = \frac{5}{4}\frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{5}{8}\frac{1}{x^2} = -\frac{5}{8x^2}$ (3)

g) $f(x) = \cos(x) \cdot \sqrt{\sin(x)} = \cos(x)\left[\sin(x)\right]^{1/2}$

$\Rightarrow F(x) = \frac{\left[\sin(x)\right]^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3}\sqrt{(\sin(x))^3}$ (3)

2. a)

[/20]



3

intersections :

- $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x+1=-2x-2$
  $3x=-3$
  $x=-1$
  pt int $\langle -1;0\rangle$

3

- $f(x)=h(x) \Leftrightarrow x+1=4x-8$
  $9=3x$
  $x=3$
  $f(3)=4$
  pt int : $\langle 3;4\rangle$

4

- $g(x)=h(x) \Leftrightarrow -2x-2=4x-8$
  $6=6x$
  $x=1$
  $g(1)=-4$
  pt int : $\langle 1;-4\rangle$

6

vérif : max +4

b) $A = \int_{-1}^{1}[f(x)-g(x)]\,dx + \int_{1}^{3}[f(x)-h(x)]\,dx$ 6

$= [\cancel{F(1)}-G(1)] - [F(-1)-G(-1)] + [F(3)-H(3)] - [\cancel{F(1)}-H(1)]$

où $F(x)=\frac{x^2}{2}+x \Rightarrow F(-1)=\frac{1}{2}-1=-\frac{1}{2}$ et $F(3)=\frac{15}{2}$

$G(x)=-x^2-2x \Rightarrow G(1)=-3$ et $G(-1)=1$

$H(x)=2x^2-8x \Rightarrow H(3)=-6$ et $H(1)=-6$ 4

$A=[-(-3)]-[-\frac{1}{2}-1]+[\frac{15}{2}-(-6)]-[-(-6)]$

$=3+\frac{1}{2}+1+\frac{15}{2}+\cancel{6}-\cancel{6}$

$=4+\frac{16}{2}=4+8=\underline{12}$ 4

Ex 3

1/13) $f(x) = \dfrac{x^3+x^2-6x}{2x^2-8} = \dfrac{x(x-2)(x+3)}{2(x^2-4)} = \dfrac{x(x-2)(x+3)}{2(x-2)(x+2)}$

• as. vert : candidats $x=-2$ et $x=2$

(3) $\lim\limits_{x\to+2} f(x) = \lim\limits_{x\to+2} \dfrac{x\cancel{(x-2)}(x+3)}{2\cancel{(x-2)}(x+2)} = \lim\limits_{x\to+2} \dfrac{x(x+3)}{2(x+2)} = \dfrac{10}{4} = \dfrac{5}{2}$

pas d'as. vert en $x=2$

$\lim\limits_{x\to-2} f(x) = \lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x\cancel{(x-2)}(x+3)}{2\cancel{(x-2)}(x+2)}$ type "$\frac{1}{0}$"

(4)

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = \dfrac{(-2)\cdot 1}{2\cdot 0^+} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = \dfrac{(-2)\cdot 1}{2\cdot 0^+} = +\infty$

donc $x=-2$ candidat de f

• as. obl / horiz : degré num = degré denom + 1 $\Rightarrow$ as obl et pas d'as. horiz

Methode 1 :

(6)

$$\begin{array}{r|l} x^3+x^2-6x & 2x^2-8 \\ \hline -\ x^3 \qquad -4x & \frac{1}{2}x+\frac{1}{2} \\ x^2-2x & \\ -\ x^2-4 & \\ -2x+4 & \end{array}$$

donc $x^3+x^2-6x = (2x^2-8)\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)+(-2x+4)$

càd $\dfrac{x^3+x^2-6x}{2x^2-8} = \dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2} + \dfrac{-2x+4}{2x^2-8}$

d'où $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[f(x)-\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)\right] = \lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[\dfrac{-2x+4}{2x^2-8}\right] = 0$

donc $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ est as oblique de f à $\pm\infty$

./.

Méthode 2

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+x^2-6x}{(2x^2-8)\cdot x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3+x^2-6x}{2x^3-8x}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^3}(1+\frac{1}{x}-\frac{6}{x^2})}{\cancel{x^3}(2-\frac{8}{x^2})} = \frac{1}{2} = a$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-ax] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3+x^2-6x}{2x^2-8} - \frac{1}{2}x\right]$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{(x^3+x^2-6x)-x(x^2-4)}{2(x^2-4)}\right]$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^3}+x^2-6x-\cancel{x^3}+4x}{2(x^2-4)}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+4x}{2x^2-8x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\cancel{x^2}(1+\frac{4}{x})}{\cancel{x^2}(2-\frac{8}{x})} = \frac{1}{2} = b$$

donc $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ as. obl. de f à $\pm\infty$

4.

1/16) a) Faux. Contre-exemple : $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

(1+3)

on a : $S_n = \Delta x \cdot 0 + \dots + \Delta x \cdot 0 = 0$

$S_n = \Delta x \cdot 1 + \dots + \Delta x \cdot 1 = 1$

donc f pas intégrable

b) Vrai Démo

(1+3)

f dérivable $\underset{3^e}{\Rightarrow}$ f continue $\underset{\text{thm non démontré en 4e}}{\Rightarrow}$ f intégrable

c) Faux. Une intégrale est un nombre (qd elle existe) qui peut servir à mesurer une aire algébrique (mais aussi un volume,..

(1+3)

d) Faux

$\lim_{x\to a} f(x) = c \neq f(a) = d$

donc, par déf. de la continuité f n'est pas continue en a.

(1+3)

Exercice 5 (environ 10 points)

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $f(x)=x^2$.

On calcule ci-dessous $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ à l'aide de la définition de l'intégrale.

Pour chaque [.....], compléter directement sur l'énoncé ce qui manque.

Début du calcul

On partage [.....[0;1].....] en n intervalles équidistants de longueur $\frac{1}{n}$ et on note 1

$\Delta x=$ [.....$\frac{1}{n}$.....] 1

On pose : $x_0=0$

$x_1=0+\Delta x$ [.....$=\frac{1}{n}$.....] 1

$x_2=0+2\Delta x=$[.....$\frac{2}{n}$.....] 1

...

$x_{n-1}=0+(n-1)\Delta x=$[.....$\frac{n-1}{n}$.....] 1

$x_n=0+n\Delta x=$[.....$\frac{n}{n}=1$.....] 1

On calcule la **somme des aires des grands rectangles** :

$$S_n = \Delta x f(x_1)+\Delta x f(x_2)+\Delta x f(x_3)+\ldots+\Delta x f(x_n)$$

$$= \frac{1}{n}f(\frac{1}{n})+\frac{1}{n}f(2\frac{1}{n})+\frac{1}{n}f(3\frac{1}{n})+\ldots+\frac{1}{n}f(n\frac{1}{n})$$

$$= \frac{1}{n}(\frac{1}{n})^2+\frac{1}{n}([\ldots\frac{2}{n}\ldots])^2+\frac{1}{n}(3\frac{1}{n})^2+\ldots+[\ldots\frac{1}{n}\ldots](n\frac{1}{n})^2$$ 1/1

$$= \frac{1}{n}(\frac{1}{n})^2+\frac{1}{n}(\frac{2}{n})^2+\frac{1}{n}(\frac{3}{n})^2+\ldots+\frac{1}{n}(\frac{n}{n})^2$$

$$= \frac{1}{n}(\frac{1}{n})^2([1^2+2^2+\ldots+(n-1)^2+n^2])$$ 2

$$= [\frac{1}{n^3}(1^2+2^2+\ldots+n^2)]$$ 2

Dans la table numérique, on trouve la formule suivante:

$$(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

On obtient alors:

$$S_n = [\frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}]$$ 2

On calcule la **somme des aires des petits rectangles** de façon identique et on trouve:

$$s_n = \frac{1}{n^3}\left(0^2+1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2\right)$$

Dans la même formule qu'au cas précédent, on substitue n par n-1 et on obtient:

$$\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+(n-1)^2\right)=\frac{[(n-1)((n-1)+1)(2(n-1)+1)]}{6}=\frac{[(n-1)\cdot n\cdot(2n-1)]}{6}$$ 2/

Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{[n(n+1)(2n+1)]}{6n^3}=[\frac{2}{6}=\frac{1}{3}]$$ 1/

De même $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n=\frac{1}{3}$

On avait $s_n \leqslant A \leqslant S_n$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n \leqslant A \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

C'est-à-dire : $\frac{1}{3} \leqslant A \leqslant [\frac{1}{3}]$, donc $\int_0^1 x^2\,dx=[\frac{1}{3}]$ 1/1

tot: /21

Exercice 6 (environ 2 points)

On considère le Théorème de Newton-Leibnitz

(a) L'énoncer complètement sous la forme « Si .... alors ... »

(b) Expliquer en quoi il est si important

(c) [Facultatif: max: environ + 3 points] Le démontrer.