Travail intermédiaire de mathématiques n°4

Date : 26 mars 2013

Durée : 90 minutes

Enseignant : Jean-Marie Delley

Cours : 4Ma1DF02

Nom: ....

Prénom: ....

Groupe: ....

Matériel autorisé

- Calculatrice personnelle TI82
- Table numérique non annotée

Remarques

- Il ne suffit pas de répondre par un nombre ou par oui ou par non; il est important de justifier les réponses et de donner tous les détails des calculs.
- Si vous utilisez la calculatrice pour déterminer directement un résultat, indiquez-le par un « C »!
- Indiquez vos initiales en haut de chaque page

Informations chiffrées après correction du maître

Notations (une coche par faute) :

Fautes :	→ .... / ....

Français (une coche par faute) [bonus] :

Fautes :	→ .... / ....

Total des points des exercices : .... / ....

Total des points de l'épreuve : .... / ....

Note : / 6

Note du corrigé: / 6

Crédit obtenu avec ce corrigé :

Crédit éventuel d'un corrigé précédent :

Note finale du travail: / 6

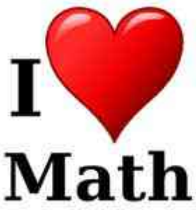
Informations relatives au corrigé du travail par l'élève

- sur des feuilles A4 au format paysage, sur 3 colonnes et pour chaque erreur, l'élève:

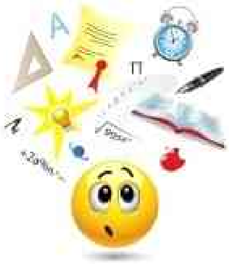
dans la colonne 1: recopie l'erreur	dans la colonne 2: explique en quoi c'est faux (et non pourquoi c'est faux !)	dans la colonne 3: corrige l'erreur

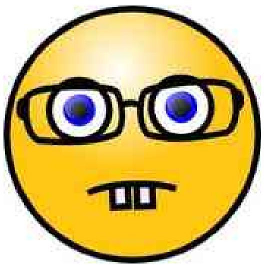
- le maître corrige le corrigé et lui attribue une note indicative qui n'entre pas en compte dans le calcul de la moyenne; par contre:
  - si la note du corrigé est 5.5 ou 6 : la note du travail est augmentée de 0.5
  - si la note du corrigé est 4.5 ou 5 : la note du travail n'est pas modifiée et un crédit de 0.25 est à valoir pour le prochain processus d'évaluation de type «épreuve 90' »
  - si la note du corrigé est inférieure ou égale à 4 : la note du travail n'est pas modifiée
- informations complémentaires sur http://math.bibop.ch/generalites/evaluation/corriges-d-epreuves

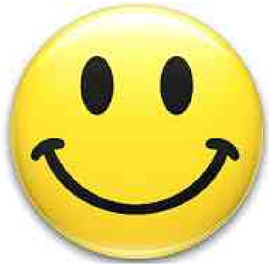
Prélude

N'oubliez pas la pensée positive : 

**Et puis … c'est le dernier travail de votre parcours au collège … hors matu !
profitez-en au maximum !**







Début du travail

Exercice 1 (environ 7 points)

Soient W(-1;-1), X(4;-1) et Y(4;2) et Z(-1;2) des points du plan. Représenter graphiquement l'image du quadrilatère $WXYZ$ par les transformations du plan suivantes (on ne demande pas de calculs, mais d'utiliser des couleurs pour bien faire apparaître ces deux images) :

(a) l'homothétie H de centre C(3;0) et de rapport $r = 2$
(b) la projection P sur la droite $y = x + 2$
(c) Calculer les images du vecteur nul par ces deux transformations. Sont-elles linéaires ? Justifier

Exercice 2 (environ 9 points)

Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Justifier.

(a) $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ définie par $F\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2x+y\\-3y\end{pmatrix}$
(b) $K:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ définie par $K(x\,;y)=(2x-3y+5xy\,;x^5+1)$
(c) $G:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ définie par $G(x\,;y)=(2x+3y\,;x^2-y^2)$

Exercice 3 (environ 8 points)

Démontrer précisément pourquoi la matrice d'une symétrie d'axe faisant un angle de α avec l'axe Ox est donnée par $\begin{pmatrix}\cos(2\alpha) & \sin(2\alpha)\\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha)\end{pmatrix}$.

Exercice 4 (environ 7 points)

Décrire géométriquement l'application linéaire associée à la matrice donnée :

(a) $M_F = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (b) $M_K = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

Exercice 5 (environ 12 points)

Soit $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire dont la matrice est $M_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application linéaire définie par $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ -y \end{pmatrix}$

(a) Calculer $F \circ L \begin{pmatrix} 15 \\ 29 \end{pmatrix}$

(b) Calculer $F^{-1}\begin{pmatrix} 12 \\ -13 \end{pmatrix}$

(c) Que peut-on dire de la réciproque de L ?

Exercice 6 (environ 12 points)

Les conjectures suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

(a) Soit P une projection. Alors $P \circ P = P$
(on ne demande pas de calcul, vous pouvez appuyer votre raisonnement sur un schéma)

(b) Si R est une rotation quelconque, alors R est linéaire.

(c) Si L est une application linéaire, alors L^{-1} existe.

Exercice 7 (environ 6 points)

On considère l'application linéaire $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+y \\ -y+x \\ y+x \end{pmatrix}$

(a) Calculer les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^2$

(b) Déterminer la matrice de F sur le même principe que pour les applications linéaires $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$.

(c) Utiliser cette matrice pour calculer $F\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.