MA4N-802 Corrigé travail 40' n°3 février 2015 tot. 61 pts

1 /8

(a) $\overline{P}_{6;3,2} = \dfrac{6!}{3!\,2!} = 60$ (3)

(b) $A^9_6 = \dfrac{9!}{(9-6)!} = \dfrac{9!}{3!} \overset{\text{"C"}}{=} 60480$ (2)

(c) $\underbrace{6}_{\text{placer le "A"}} \cdot \underbrace{A^8_5}_{\text{5 autres lettres avec ordre, sans répétition}} = 6 \cdot \dfrac{8!}{3!} = 40320$ (3)

2 /5

(a) $\underbrace{C^{10}_6}_{\text{choix de 6 parmi 10, sans ordre}} = \dfrac{10!}{6!\,4!} = 210$ (2)

(b) reste 4 à choisir parmi 8 $\quad C^8_4 = 70$ (3)

3 /12

(a) $C^{33}_4 = 40920$ (2)

(b) $\underbrace{8}_{\text{choix d'un ss-dir}} \cdot \underbrace{C^{25}_3}_{\text{3 autres parmi les non-ss-dir}} = 8 \cdot 2300 = 18400$ (3)

(c) $8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 3 = 2880$ (3)

(d) au moins 1 ss-dir = tout − [aucun ss-dir]

$= 40920 - \underbrace{C^{25}_4}_{\text{4 parmi les 25 non ss-dir.}} = 28270$ (4)

(4) Soit x et y les 2 nombres

1/14

On a : $x + y = 60 \Leftrightarrow y = 60 - x$

on veut : $x^2 \cdot y^3$ à optimiser

réduction à une variable : $f(x) = x^2 \cdot (60-x)^3$ (4)

dérivée : $f'(x) = 2x(60-x)^3 + x^2\, 3 \cdot (60-x)^2 \cdot (60-x)'$

$= 2x(60-x)^3 + 3x^2(60-x)^2(-1)$

$= x(60-x)^2 \,[2(60-x) - 3x]$

$= x(60-x)^2 \,[120 - 5x]$ (3)

tableau de signes :

x		0		24		60	
x	−	0	+	+	+	+	+
$(60-x)^2$	+	+	+	+	+	0	+
$120-5x$	+	+	+	0	−	−	−
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	−
$f(x)$	↘	min	↗	max	↘	pt infl.	↘

(4)

nombres positifs

(a) Le max est atteint pour $x = 24$, donc $y = 60 - 24 = 36$ (2)

il vaut alors $f(24) = 24^2 \cdot 36^3 = 26873856$

(b) Comme les deux nombres doivent être positifs, on ne considère que des nombres compris entre 0 et 60 : le min est atteint soit pour $x=0$ et $y=60$, soit $y=0$ et $x=60$

$x^2 y^3 = 0$ $x^2 y^3 = 0$ (1)

5

[/14]

(a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad N = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$ $\quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

On a : $M \cdot X = N$ 3

(b) $M^{-1} = ?$

- $\det M = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} \dots \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$

$= 2 \cdot (-6) - 1 \cdot (3)$ 2

$= -15$

- $B = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -4 \\ 1 & -7 & 2 \\ -6 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ 3

- $B^t = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -6 \\ -1 & -7 & -3 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 1

- $M^{-1} = \frac{1}{\det M} \cdot B^t = -\frac{1}{15} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -6 \\ -1 & -7 & -3 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/15 & -1/15 & 6/15 \\ 1/15 & 7/15 & 3/15 \\ 4/15 & -2/15 & -3/15 \end{pmatrix}$ 2

$X = M^{-1} \cdot N = -\frac{1}{15} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -6 \\ -1 & -7 & -3 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = -\frac{1}{15} \begin{pmatrix} -45 \\ -30 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

3

donc $x = 3$
$y = 2$
$z = -1$

[/8]

(6) (a) Faux

<u>Contre-ex:</u> $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(1+3)

(b) Vrai

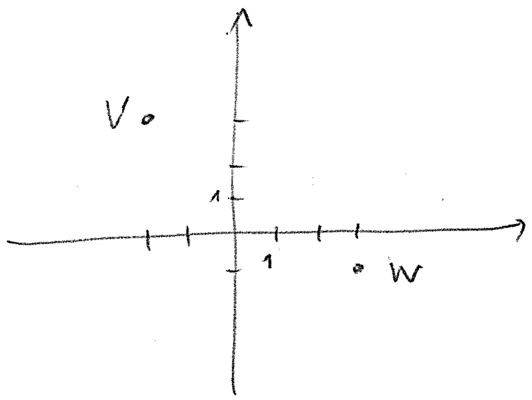
<u>démo:</u> $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$

$=$

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!\,(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!\,p!}$$

(1+3)

(7) (a)



(+1)

(b) $-3v = 6-9i$

$v+w = 1+2i$

$vw = -6+9i+2i-3i^2$ (+2)

$= -3+11i$

(c) $\cancel{z}(z^2+2z+5)=0$

$z_{1,2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = -2 \pm$ (+2)

$= \dfrac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2}$

$= \dfrac{-2 \pm \sqrt{16i^2}}{2}$

$= \dfrac{-2 \pm 4i}{2}$

$= -1 \pm 2i$

$S = \{-1-2i \,;\, -1+2i\}$