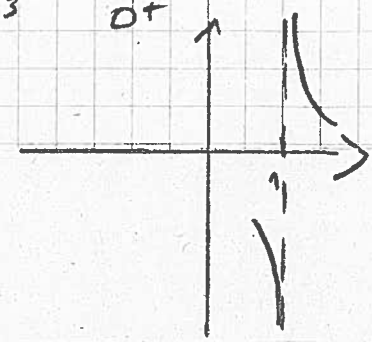
Ex 1

[/12]

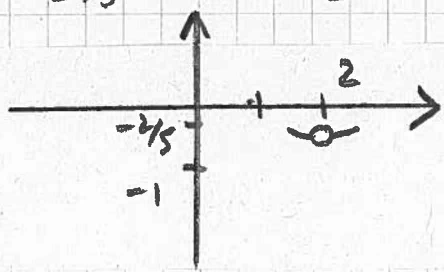
a) type "$\frac{1}{0}$" : $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{-2}{(1-x)^3} = \frac{-2}{(0^-)^3} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{-2}{(1-x)^3} = \frac{-2}{(0^+)^3} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$

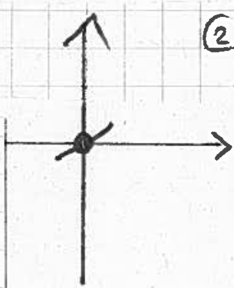
donc $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \nexists$ (4)



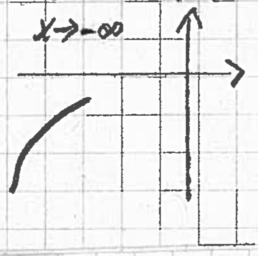
b) type "$\frac{0}{0}$" : $\lim\limits_{x\to 2} \frac{(x-4)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+3)} = \frac{2-4}{2+3} = \frac{-2}{5} = -\frac{2}{5}$ (3)



c) pas de pb! $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-6x}{x^2+x-12} = \frac{0}{-12} = 0$ (2)



d) type "$\infty-\infty$" : $\lim\limits_{x\to -\infty} x^3(1-x^3) = (-\infty)^3(1-(-\infty)^3)$



$= (-\infty)(1-(-\infty))$

$= (-\infty)(1+\infty) = (-\infty)\cdot(+\infty)$

$= -\infty$ (3)

Ex 2

[/16]

$f(x) = \frac{\dots}{(x+1)(x-2)}$ pour les as vert

$\Rightarrow f(x) = \frac{\text{degré } 2}{(x+1)(x-2)}$ pour avoir une as horiz

$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2}{(x+1)(x-2)}$: as. horiz $y = \frac{1}{1} = 1$

$\Rightarrow f(x) = \frac{-\frac{1}{3}x^2}{(x+1)(x-2)}$: as. horiz $y = -\frac{1}{3}$ (4)

une autre fonction : $g(x) = \frac{-\frac{1}{3}x^2+1}{(x+1)(x-2)}$ (2)

Ex 3

[/5]

$$f(x) = 4x^5 + \frac{3x^2}{4} - \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow F(x) = 4 \cdot \frac{x^6}{6} + \frac{3}{4}\frac{x^3}{3} - \sqrt{2}\,x = \frac{2}{3}x^6 + \frac{1}{4}x^3 - \sqrt{2}x \qquad (3)$$

$$\left.\begin{aligned} G(x) &= \frac{2}{3}x^6 + \frac{1}{4}x^3 - \sqrt{2}x + 1 \\ H(x) &= \frac{2}{3}x^6 + \frac{1}{4}x^3 - \sqrt{2}x + 2 \end{aligned}\right\} \text{par exemple...}$$

(2)

Ex 4

[/12]

(b) $h(x) = \underbrace{-\frac{1}{x^2}}_{f'(x)} \cdot \Big(\underbrace{\frac{1}{x} + 2}_{f(x)}\Big)^{44}$

$$\Rightarrow H(x) = \frac{\left(\frac{1}{x} + 2\right)^{45}}{45} \qquad (3)$$

(a) $h(x) = 15x^2 \cdot (2x^3 - 1)^4$

$$= 15 \cdot \frac{1}{6}\Big[\big(\underbrace{2x^3 - 1}_{f(x)}\big)^4 \cdot \underbrace{6x^2}_{f'(x)}\Big]$$

$$\Rightarrow H(x) = \frac{\cancel{15}^{\,3}}{\cancel{6}_{\,2}} \cdot \frac{(2x^3 - 1)^5}{\cancel{5}} = \frac{1}{2}(2x^3 - 1)^5 \qquad (4)$$

(c) $h(x) = (x^3 - 2)^2 = x^6 - 4x^3 + 4$

$$\Rightarrow H(x) = \frac{x^7}{7} - x^4 + 4x \qquad (3)$$

(d) $h(x) = 2\sin(x)$

$$\Rightarrow H(x) = 2 \cdot (-\cos(x)) = -2\cos(x) \qquad (2)$$

/12

Ex 5

(a) $F'(x) = 2(x-2)\cdot 1 = 2x-4$

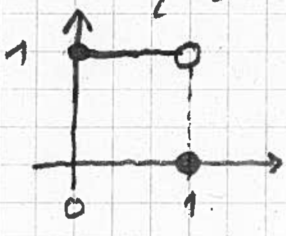
$G'(x) = 0-4+2x = 2x-4$

donc F et G sont bien deux primitives de f **VRAI**

1+3

(b) Faux c-exemple

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$



vu au cours que cette fct est intégrable, mais elle n'est pas continue, donc pas dérivable !

1+3

(c) Faux c-exemple

$$\left.\begin{aligned} f(x) &= x \\ g(x) &= x^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow h(x) = x^3$$

$$\left.\begin{aligned} F(x) &= \frac{x^2}{2} \\ G(x) &= \frac{x^3}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow F\cdot G(x) = \frac{x^5}{6}$$

$$(F\cdot G)'(x) = \frac{5x^4}{6} \neq h(x)$$

1+3

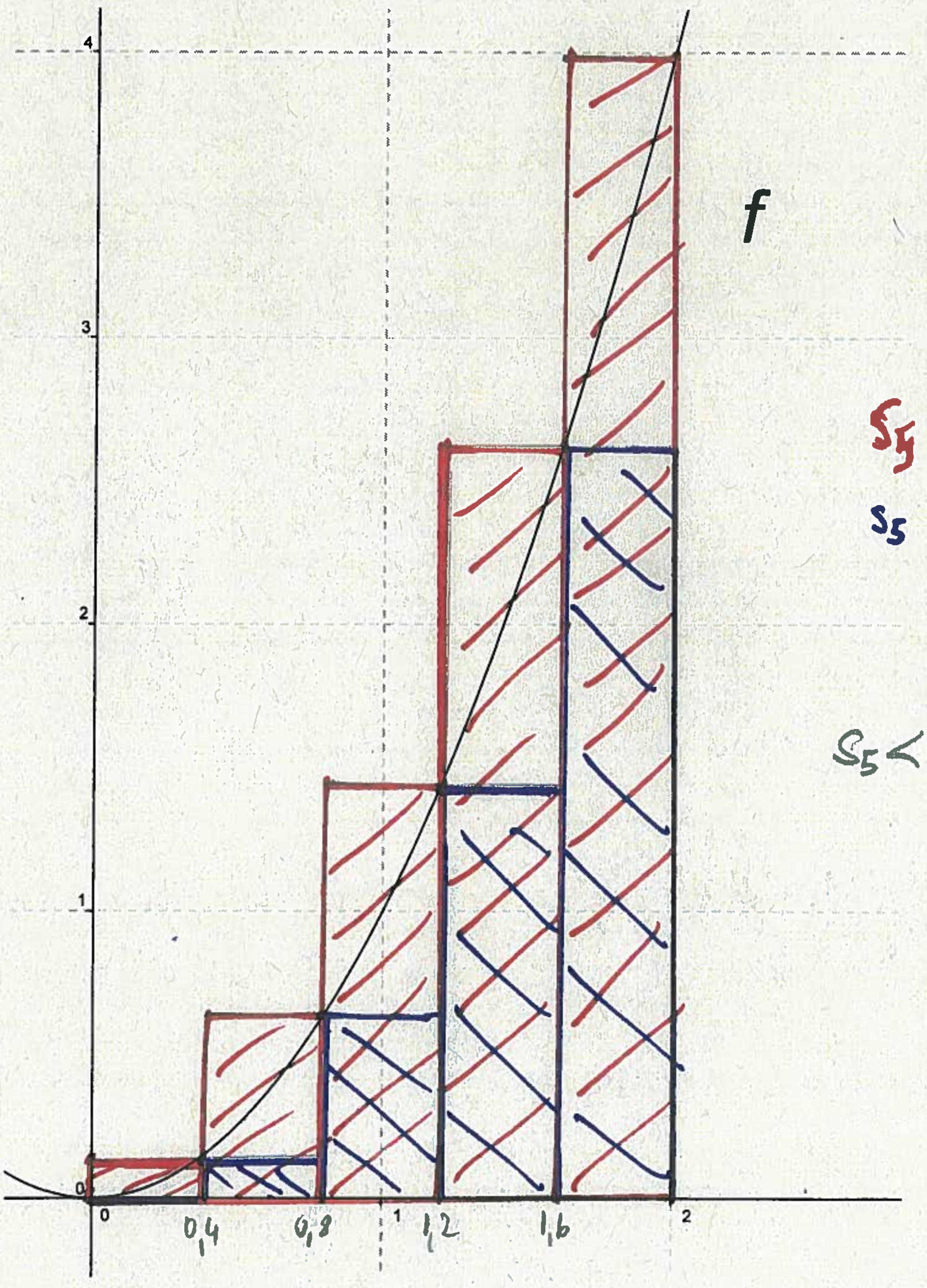
[/28]

Ex 6

a) $\Delta x = \frac{2-0}{5} = \frac{2}{5} = 0{,}4$ (3)

$x_0 = 0 \quad x_1 = 0{,}4 \quad x_2 = 0{,}8 \quad x_3 = 1{,}2 \quad x_4 = 1{,}6 \quad x_5 = 2$

(b) Représenter les points de découpe ainsi que les grands rectangles et les petits rectangles sur le graphe ci-dessous :



$s_5 < A < S_5$

(2)

c) $s_5 = 0{,}4 \cdot f(0) + 0{,}4 f(0{,}4) + 0{,}4 f(0{,}8) + 0{,}4 f(1{,}2) + 0{,}4 f(1{,}6)$
$= 0{,}4 \cdot [0^2 + 0{,}4^2 + 0{,}8^2 + 1{,}2^2 + 1{,}6^2] = 1{,}92$

$S_4 = 0{,}4 f(0{,}4) + 0{,}4 f(0{,}8) + 0{,}4 f(1{,}2) + 0{,}4 f(1{,}6) + 0{,}4 f(2)$ (3)
$= 0{,}4 \cdot [0{,}4^2 + 0{,}8^2 + 1{,}2^2 + 1{,}6^2 + 2^2] = 3{,}52$

On considère maintenant un partage de [0;2] en n sous-intervalles équidistants. On donne ci-dessous certains éléments d'un calcul de limite de grande somme de Riemann pour déterminer l'aire de la surface comprise entre une représentation graphique de la fonction f , l'axe Ox et les droites d'équations y=0, x=0 et x=2.

(d) Compléter les [........] qui manquent :

Début du calcul

On partage [...[0;2]......] en n intervalles équidistants de longueur [......$\frac{2}{n}$......]

et on note $\Delta x =$ [...$\frac{2}{n}$.........]

On pose : $x_0 =$[...0.........]

$x_1 =$[...$\frac{2}{n}$.........] $= 2/n$

$x_2 =$[..$2\cdot\frac{2}{n}$.........] $= 4/n$

$x_3 =$[..$3\cdot\frac{2}{n}$.........] $= 6/n$

...

$x_{n-1} =$[$(n-1)\cdot\frac{2}{n}$.........] $= 2(n-1)/n$ 3

$x_n =$[...$n\cdot\frac{2}{n}$.........] $= 2n/n = 2$

On calcule la somme des aires des grands rectangles :

$$S_n = \Delta x\, f(x_1) + \Delta x\, f(x_2) + \Delta x\, f(x_3) + \ldots + \Delta x\, f(x_n)$$

$= [\Delta x\left(f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)\right)]$

Le nombre de ligne nécessaire à votre calcul ... utilisez celles qui vous sont utiles ...

$= [\frac{2}{n}\cdot\left(\left(\frac{2}{n}\right)^2+\left(\frac{4}{n}\right)^2+\left(\frac{6}{n}\right)^2+\ldots+\left(\frac{2n}{n}\right)^2\right)]$

$= [\frac{2}{n}\cdot\frac{1}{n^2}\left(2^2+4^2+6^2+\ldots+(2n)^2\right)]$

...

$= [\frac{2}{n^3}\cdot\left(2^2+(2\cdot2)^2+(2\cdot3)^2+\ldots+(2\cdot n)^2\right)]$

$= \frac{2}{n^3}\left(2^2\cdot\left(1^2+2^2+3^3+\ldots+n^2\right)\right)$ 3

Dans la table numérique, on trouve la formule suivante:

$$\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

On obtient alors:

$$S_n = \left[\frac{8}{n^3} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right]$$

Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{8}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{8}{6}\right] \frac{2n^3+3n^2+n}{n^3}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{8}{6}\,\frac{\cancel{n^3}(2+3/n+1/n^2)}{\cancel{n^3}}\right] = \frac{8}{6}\cdot 2 = \frac{8}{3}$$

(on ne demande pas le détail du calcul de limite)

3

(e) $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{8}{3}$ car on a alors

$$\frac{8}{3} = s_n \leq \int_0^2 f(x)\,dx \leq S_n = \frac{8}{3}$$

1+2

(f) $\displaystyle\int_0^2 g(x)\,dx = -\frac{8}{3}$, car tous les calculs auraient été identiques, avec une valeur négative devant les carrés, qui se reporterait sur le résultat final

1+2

(g) $$\int_0^2 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{8}{3}$$

3

COLLEGE DE SAUSSURE Année scolaire 2012-2013
DGD/mc

INSCRIPTION AUX EXAMENS DE MATURITE

Nom : ______________________________

Prénom : ______________________________

Date de naissance : ______________________________

Groupe : ______________________________

Entrée au collège en (année) : ______________________________

Nombre d'années passées au collège : ______________________________
(y compris l'année en cours)

Nationalité : ______________________________

Naturalisation en cours : oui / non

Pour les **Suisses** :
Lieu d'origine : - commune : ______________________________

- canton : ______________________________

Pour les **étrangers** et binationaux :

Lieu de naissance : ______________________________

Examen écrit
(ne concerne que les élèves des options spécifiques "biologie et chimie" ou "économie et droit")

Je choisis de passer l'examen écrit dans la discipline suivante : [ ]

Date : .... Signature : ....