Travail intermédiaire de mathématiques n°1

Date : 11 octobre 2012

Durée : 90 minutes

Enseignant : Jean-Marie Delley

Cours : 4Ma1DF02

Nom: ....

Prénom: ....

Groupe: ....

Matériel autorisé

- Calculatrice personnelle TI82
- Table numérique non annotée

Remarques

- Il ne suffit pas de répondre par un nombre ou par oui ou par non; il est important de justifier les réponses et de donner tous les détails des calculs.
- Si vous utilisez la calculatrice pour déterminer directement un résultat, indiquez-le par un « C »!
- Indiquez vos initiales en haut de chaque page

Informations chiffrées après correction du maître

Notations (une coche par faute) :

Fautes :	→ .... / ....

Français (une coche par faute) [bonus] :

Fautes :	→ .... / ....

Total des points des exercices : .... / ....

Total des points de l'épreuve : .... / ....

Note : / 6

Note du corrigé: / 6

Crédit obtenu avec ce corrigé :

Crédit éventuel d'un corrigé précédent :

Note finale du travail: / 6

Informations relatives au corrigé du travail par l'élève

- sur des feuilles A4 au format paysage, sur 3 colonnes et pour chaque erreur, l'élève:

dans la colonne 1: recopie l'erreur	dans la colonne 2: explique en quoi c'est faux (et non pourquoi c'est faux !)	dans la colonne 3: corrige l'erreur

- le maître corrige le corrigé et lui attribue une note indicative qui n'entre pas en compte dans le calcul de la moyenne; par contre:
  - si la note du corrigé est 5.5 ou 6 : la note du travail est augmentée de 0.5
  - si la note du corrigé est 4.5 ou 5 : la note du travail n'est pas modifiée et un crédit de 0.25 est à valoir pour le prochain processus d'évaluation de type «épreuve 90' »
  - si la note du corrigé est inférieure ou égale à 4 : la note du travail n'est pas modifiée
- informations complémentaires sur http://math.bibop.ch/generalites/evaluation/corriges-d-epreuves

Début du travail

Exercice 1 (environ 3 points)

Calculer les limites suivantes et interpréter graphiquement le résultat :

(a) $\lim_{x\to 1} \frac{-2}{(1-x)^3}$

(b) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-6\mathrm{x}+8}{x^2+x-6}$

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-6\mathrm{x}}{x^2+x-12}$

(d) $\lim_{x\to -\infty} x^3-x^6$

Exercice 2 (environ 1.5 point)

Déterminer deux fonctions réelles f et g (en proposant deux expressions *f(x)* = … et g*(x)* = …) telle que :

- $x=-1$ et $x=2$ sont des asymptotes verticales de la fonction
- $y=-\frac{1}{3}$ est une asymptote horizontale de la fonction à $\pm\infty$

(chacune des deux fonctions doit vérifier les deux contraintes !)

Exercice 3 (environ 1 point)

Soit *f* la fonction définie par $f(x)=4x^5+3\frac{x^2}{4}-\sqrt{2}$. Déterminer trois primitives *F, G* et *H* différentes de *f.*

Exercice 4 (environ 3 points)

Pour chacune des fonctions *f* définies ci-dessous, déterminer une primitive *F*; donner les réponses simplifiées au maximum et sans exposant négatif ou fractionnaire :

(a) $h(x)=15x^2(2\mathrm{x}^3-1)^4$

(b) $h(x)=-\frac{1}{x^2}(\frac{1}{x}+2)^{44}$

(c) $h(x)=(x^3-2)^2$

(d) $h(x)=2\sin(x)$

Exercice 5 (environ 3 points)

Vrai ou faux? Justifier.

(a) Les fonctions réelles *F* et *G* définies par $F(x)=(x-2)^2$ et $G(x)=1-4x+x^2$ sont deux primitives de la fonction réelle *f* définie par $f(x)=2\mathrm{x}-4$

(b) Si *f* est intégrable sur un intervalle I, alors *f* est dérivable sur I

(c) Soit *h* une fonction de la forme $h=f\cdot g$, *F* une primitive de *f et G* une primitive de *g.* Alors $F\cdot G$ est une primitive de *h.*

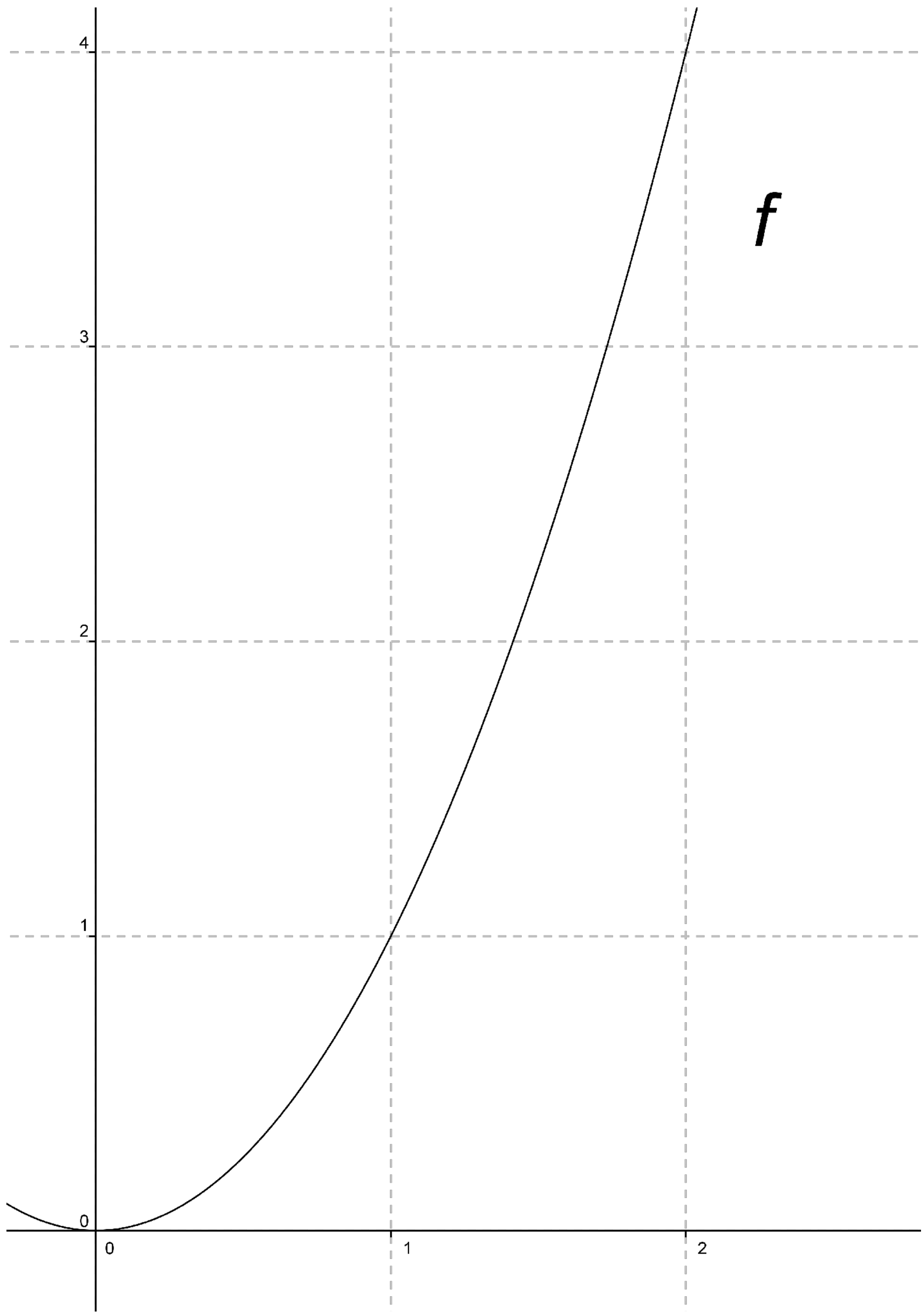
Exercice 6 (environ 7 points)

Soit la fonction fonction f définie par $f(x)=x^2$.

On considère un découpage de [0;2] en 5 sous-intervalles équidistants pour donner un encadrement de l'aire délimitée par une représentation graphique de f et les droites d'équations y=0, x=0 et x=2.

(a) Identifier la longueur Δx de chaque intervalle et les points de découpe $x_0, x_1, \dots, x_5$

(b) Représenter les points de découpe ainsi que les grands rectangles et les petits rectangles sur le graphe ci-dessous :



(c) Calculer cet encadrement (c'est à-dire la valeur inférieure à l'aire et la valeur supérieure à l'aire), en donnant les détails des calculs.

On considère maintenant un partage de [0;2] en n sous-intervalles équidistants.
On donne ci-dessous certains éléments d'un calcul de limite de <u>grande somme</u> de Riemann pour déterminer l'aire de la surface comprise entre une représentation graphique de la fonction f , l'axe Ox et les droites d'équations y=0, x=0 et x=2.

(d) Compléter les […......] qui manquent :

Début du calcul

On partage […...................] en n intervalles équidistants de longueur […...................]

et on note $\Delta x=$ […...........................]

On pose : x_0 =[…..........................]

x_1 =[…..........................]

x_2 =[…..........................]

x_3 =[…..........................]

…

x_{n-1} =[…..........................]

x_n =[…..........................]

On calcule la somme des aires des grands rectangles :

$$S_n = \Delta x\, f(x_1)+\Delta x\, f(x_2)+\Delta x\, f(x_3)+\ldots+\Delta x\, f(x_n)$$

= […..]

Le nombre de ligne nécessaire à votre calcul ... utilisez celles qui vous sont utiles ...

= […..]

= […..]

= […..]

= […..]

$$= \frac{2}{n^3}\left(2^2\cdot\left(1^2+2^2+3^3+\ldots+n^2\right)\right)$$

Dans la table numérique, on trouve la formule suivante:

$$\left(1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2\right)=\frac{n(n+1)(2\mathrm{n}+1)}{6}$$

On obtient alors:

$S_n = [\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots]$

Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{8}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \lim_{n\to+\infty} [\ldots\ldots\ldots\ldots]\frac{2n^3+3n^2+n}{n^3}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} [\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots] = \frac{8}{3}$$

(on ne demande pas le détail du calcul de limite)

Nous admettons que le même calcul pour la limite de petite somme de Riemann donnerait le même résultat.

(e) Que peut-on en déduire sur la valeur de $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$? Justifier.

(f) Si nous avions travaillé avec la fonction g définie par $g(x)=-x^2$, quel aurait été le résultat de $\int_0^2 g(x)\,\mathrm{d}x$? Justifier.

(g) Comment aurait-on pu obtenir le résultat de $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ beaucoup plus rapidement? Faites le calcul.