MA 4 DF 03 Travail 90' n° 4 Corrigé

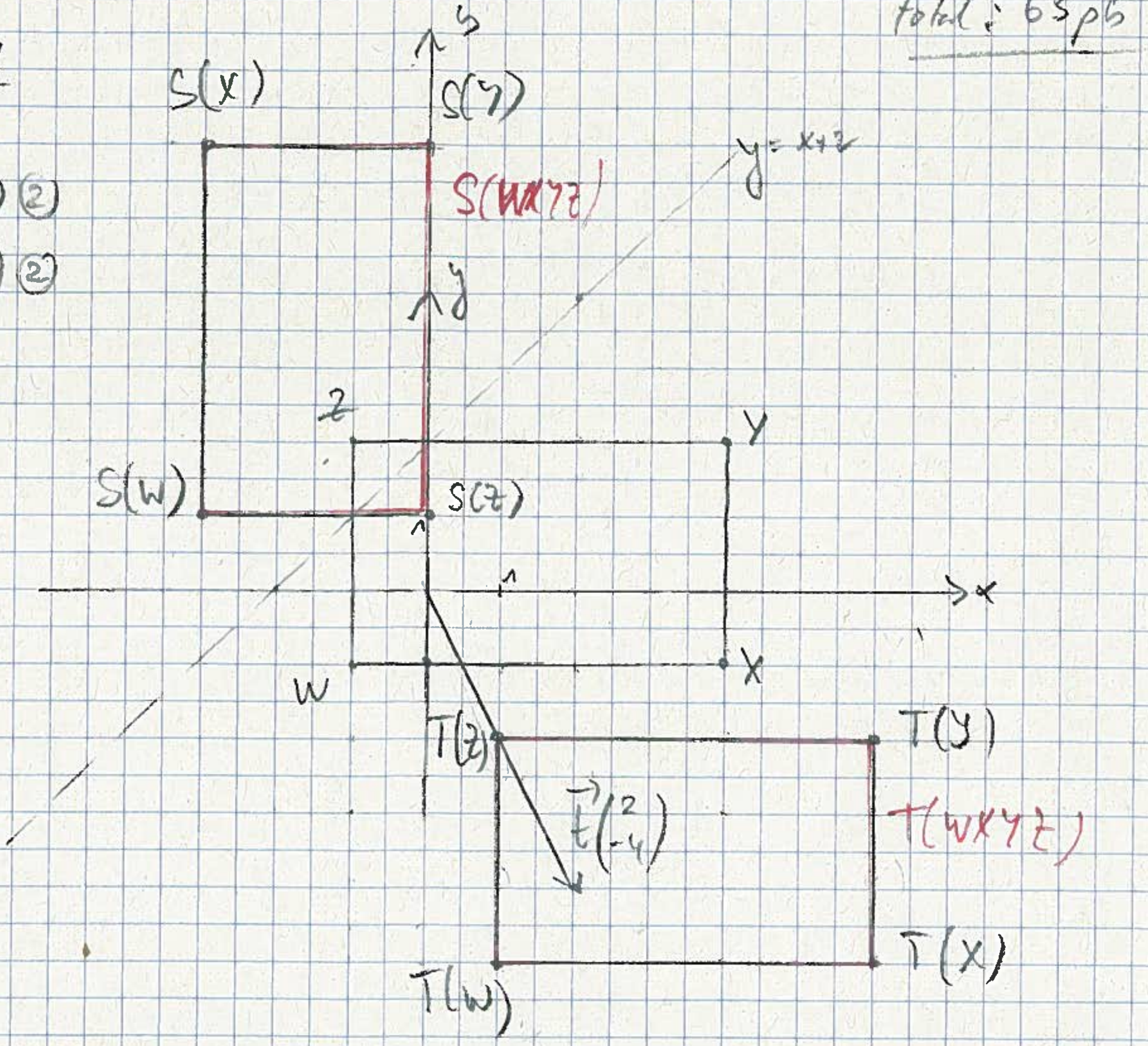
tot : 61 pts
not 1 pt
f 1 pt
[/62]

total : 63 pts

ex 1

[/7]

a) 2
b) 2



c) $T(\vec{0}) = \begin{pmatrix}2\\-4\end{pmatrix} \neq \vec{0}$
$S(\vec{0}) = \begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix} \neq \vec{0}$ } donc T et S ne sont pas linéaires

3

(d) $L(\vec{i}) = \vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$L(\vec{j}) = \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow M_L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$L(\vec{k}) = \vec{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2

ex 4

[/7]

(a) $F(\vec{i}) = \vec{i}$

$F(\vec{j}) = \vec{j}$ $\Rightarrow$ symétrie par rapport au plan Oxy

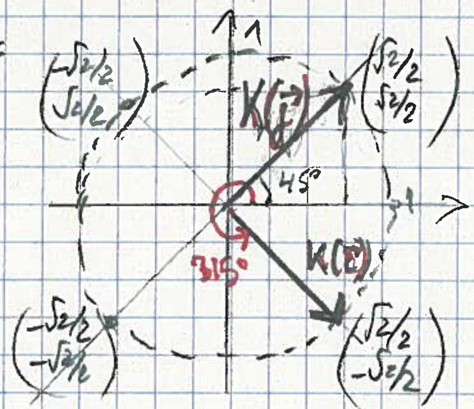
$F(\vec{k}) = -\vec{k}$

3

(b) on reconnaît une valeur exacte :

$\vec{i}$ et $\vec{j}$ on effectue une rotation de $-45°$ (ou $315°$)

$\Rightarrow$ K rotation de centre O et d'angle $315°$



4

ex 5

[/12]

(a) Matrice de F : $F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $F\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow M_F = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$F \circ L\begin{pmatrix} 31 \\ 15 \end{pmatrix} = M_F \cdot M_L \begin{pmatrix} 31 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 31 \\ 15 \end{pmatrix}$

5 $= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -31 + 2 \cdot 15 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$

(b) Inverse de M_F : $\det M_F = 0 \cdot 1 - 2(-1) = 2$

$M_F^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

4

$F^{-1}\begin{pmatrix} -12 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -12 \\ 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 12 \end{pmatrix}$

(c) $\det M_L = (-1) \cdot 0 - 0 \cdot 2 = 0$

3 donc $M_L^{-1} \nexists$, donc la réciproque de L n'existe pas

[/9]

ex 2

(a) $F(\vec{i}) = f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$F(\vec{j}) = f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow M_F = \begin{pmatrix}0 & -3\\1 & 1\end{pmatrix}$ (2)

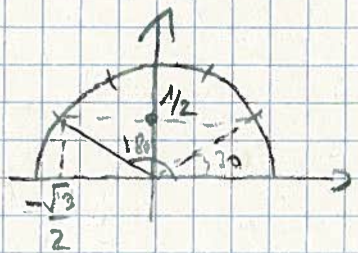
(b) $G(\vec{i}) = -\frac{1}{2}\vec{i} = \begin{pmatrix}-1/2\\0\end{pmatrix}$

$G(\vec{j}) = -\frac{1}{2}\vec{j} = \begin{pmatrix}0\\-1/2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow M_G = \begin{pmatrix}-1/2 & 0\\0 & -1/2\end{pmatrix}$ (2)

(c) $M_{S\alpha} = \begin{pmatrix}\cos(2\alpha) & \sin(2\alpha)\\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha)\end{pmatrix} \Rightarrow M_{S_{30°}} = \begin{pmatrix}\cos(150) & \sin(150)\\ \sin(150) & -\cos(150)\end{pmatrix}$

$\alpha = 75°$

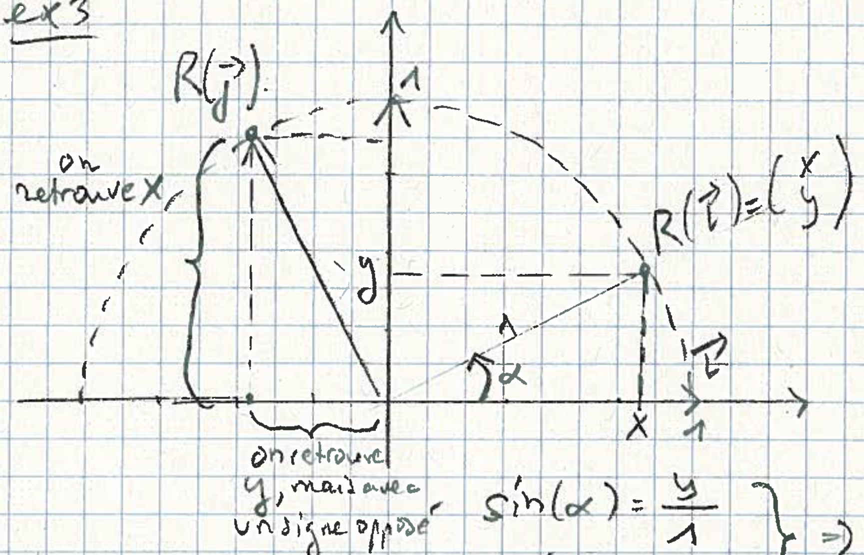


$= \begin{pmatrix}-\sqrt{3}/2 & 1/2\\ 1/2 & +\sqrt{3}/2\end{pmatrix}$

(3)

[/8]

ex 3



$\sin(\alpha) = \frac{y}{1}$

$\cos(\alpha) = \frac{x}{1}$

$\Rightarrow R(\vec{i}) = \begin{pmatrix}\cos(\alpha)\\ \sin(\alpha)\end{pmatrix}$

$R(\vec{j}) = \begin{pmatrix}-y\\x\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\sin(\alpha)\\ \cos(\alpha)\end{pmatrix}$

donc $M_{R\alpha} = \begin{pmatrix}\cos(\alpha) & -\sin(\alpha)\\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\end{pmatrix}$

[/12]

ex6

(a) Faux

<u>C-exple</u> : $L\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'est pas linéaire,

car $L\left(2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \overset{?}{=} 2L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$L\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{?}{=} 2L\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{?}{=} 2\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ non

(1+3)

et pourtant $L\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$!

(b) Vrai

<u>dém</u>: $H_{r_1} \circ H_{r_2}(\vec{v}) = H_{r_1}(H_{r_2}(\vec{v}))$

$= H_{r_1}(r_2 \cdot \vec{v})$

$= r_1 \cdot (r_2 \cdot \vec{v})$

$= r_1 r_2 \vec{v}$

(1+3)

donc $H_{r_1} \circ H_{r_2}$ est l'homothétie de rapport $r_1 r_2$

(c) Faux

<u>Contre-ex</u> P projection sur l'axe Ox est linéaire mais pas bijective

(1+3)

[/6]

ex 7

(a) $F\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $F\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ $F\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (2)

(b) $M_F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ (2)

(c) $F\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = M_F\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}_{2\times3}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}_{3\times1}$ (2)

$= \begin{pmatrix} 2\cdot1 + 0(-2) + 1\cdot3 \\ 1\cdot1 + (-1)(-2) + 3\cdot3 \end{pmatrix}_{2\times1} = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$