Collège de Saussure

Epreuve de mathématiques de 4e année, niveau normal

Date	12 décembre 2012
Durée	190 minutes
Maîtres correcteurs, cours et nombre d'élèves	Patricia Blanc : 4MA1.DF06 (18 él.), 4MA1.DF08 (22 él.) Jean-Marie Delley : 4MA1.DF02 (21 él.), 4MA1.DF03 (24 él.)
Nombre de pages,,	5
Impression	recto-verso, noir-blanc
Nombre d'exercices	8
Documents et matériel autorisés	personnels : calculatrice TI30, TI34 ou modèle équivalent; TI82
	fournis par le collège : feuilles quadrillées, extraits de table numérique
Directives	sauf indication contraire, il ne suffit pas de répondre par un nombre ou par oui ou par non; il est important de justifier les réponses et de donner tous les détails des calculs.

Nom : ....

Prénom : .... **Points :**

Groupe : ....

Cours : .... **Note** :

Début du travail

Exercice 1 (environ 12 points)

Pour chaque fonction suivante, déterminer une primitive en donnant une réponse ne contenant aucun exposant négatif ou fractionnaire :

(a) $f(x)=\dfrac{x^2}{(x^3+1)^5}$ (b) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^3+1}$ (c) $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2}$

Exercice 2 (environ 17 points)

Calculer la valeur exacte des intégrales suivantes et donner le résultat sous forme exacte et réduite le plus possible :

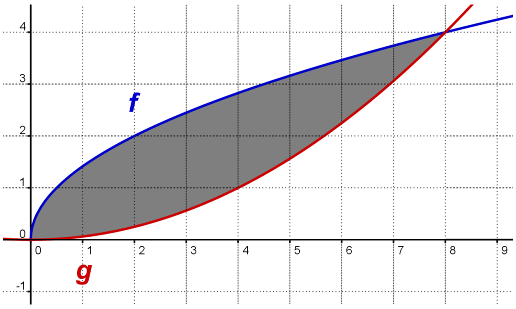
(a) $\displaystyle\int_0^4 5x\sqrt{x^2+9}\,dx$ (b) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}\,dx$ (c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(2x)\,dx$

Exercice 3 (environ 5 points)

Déterminer la primitive de la fonction *f* définie par $f(x)=5e^{2x}-3x$ qui passe par $(0;2)$.

Exercice 4 (environ 16 points)

On considère le domaine compris entre les représentations graphiques des fonctions *f* et *g* définies par $f(x)=\sqrt{2x}$ et $g(x)=\dfrac{x^2}{16}$:



(a) Déterminer par calcul les <u>coordonnées</u> des points d'intersection de ces deux fonctions.

(b) Calculer l'aire du domaine grisé, en donnant la réponse sous forme simplifiée au maximum.

(c) Calculer le volume engendré par la rotation autour de l'axe des abscisses Ox de ce domaine.

Exercice 5 (environ 12 points)

Vrai ou faux? Justifier.

(a) Soit *f* la fonction réelle définie par $f(x)=\begin{cases}-3\,,\text{ si } & x\in]1;5]\\ 0\,,\text{ si } & x=1\end{cases}$.

Alors *f* n'est pas intégrable sur]1; 5]

(b) Si *f* est dérivable sur un intervalle I, alors *f* est intégrable sur I .

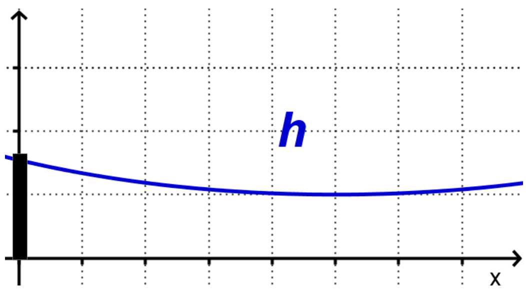
(c) Soit F la fonction réelle définie par $F(x)=\int_{-8}^{x}(t^2+1)^{16}dt$. Alors F est une fonction strictement décroissante.

Exercice 6 (environ 9 points)

On suppose que la hauteur d'une ligne électrique par rapport au sol est donnée par la fonction h définie ainsi :

$$h(x)=\frac{e^{x-1}+e^{-(x-1)}}{10}$$

où x représente la distance au sol (horizontalement) par rapport à la base du poteau électrique rectiligne et $h(x)$ est la hauteur de la ligne électrique à cet endroit là.
x et h sont mesurés en hectomètres *(1 hm = 100 m).*



(a) A quelle hauteur (en mètres) du poteau électrique le câble est-il accroché ?

(b) A quelle distance de la base du poteau (en mètres) le câble est-il le plus proche du sol ?

Exercice 7 (environ 20 points)

On considère la fonction fonction *f* définie par $f(x)=\frac{1}{4}x^3$

(a) Représenter graphiquement la fonction fonction *f* pour *x* compris entre 0 et 2 (unité=10 carrés).

On considère un partage de l'intervalle [0;2] en 5 sous-intervalles équidistants.

(b) Déterminer les valeurs de x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 et x_5 ainsi que la longueur Δx de chaque sous-intervalle.

(c) Représenter sur le même repère qu'en a) les petites et grandes sommes de Riemann en identifiant clairement chacune d'entre-elles par une couleur spécifique.

(d) Utiliser ce partage pour calculer un encadrement de $\int_0^2 f(x)dx$ par valeur inférieure et supérieure.

On considère maintenant un partage de l'intervalle [0;2] en *n* sous-intervalles égaux.

(e) Déterminer les valeurs de $x_0, x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}, x_n$ ainsi que ainsi que la longueur Δx de chaque sous-intervalle.

(f) Utiliser un calcul de limite de grande somme de Riemann pour calculer $\int_0^2 f(x)dx$ (on ne demande pas la petite somme!).

Indication : on trouve dans la table la formule $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ que vous pouvez utiliser sans autre justification.

(g) Vérifier avec un calcul plus simple que le résultat précédent est correct.

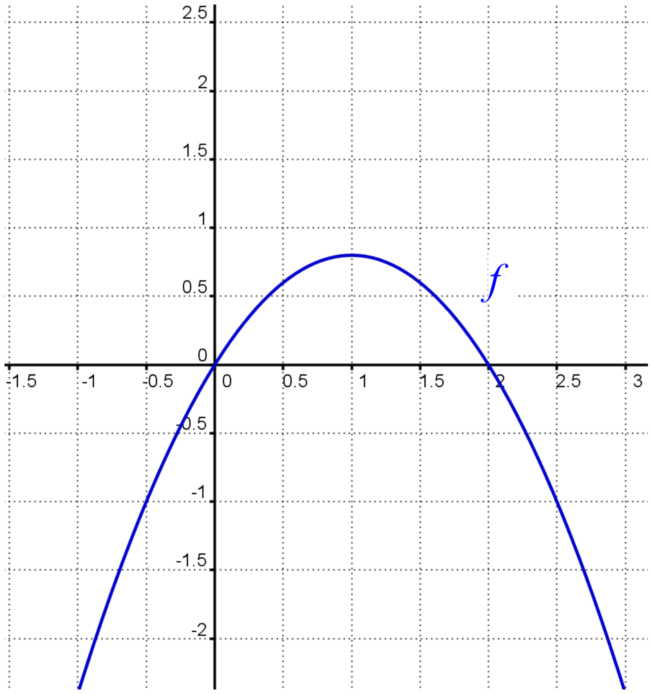
On s'intéresse maintenant à l'aire *A* de la surface comprise entre la représentation graphique de la fonction *f,* l'axe O*x* et les droites d'équations *x* = 0 et *x* = 2.

(h) Que vaut *A* ? Justifier.

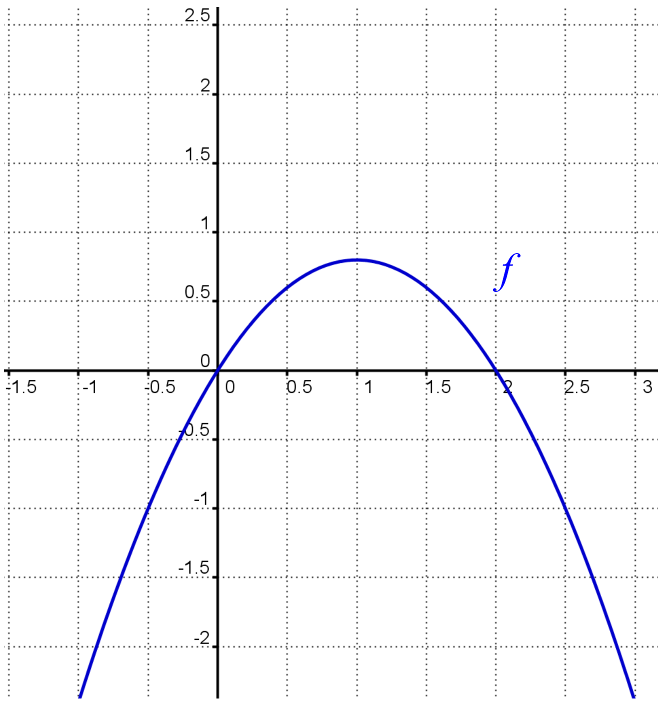
Exercice 8 (environ 9 points)

On considère une fonction f dont on ne connaît que la représentation graphique. Il s'agit de la même fonction f dans les trois cas.

(a) Représenter graphiquement sur le repère ci-dessous la dérivée de f ; on ne demande pas une précision extrême mais de bien faire apparaître les éléments clés :



(b) Représenter graphiquement sur le repère ci-dessous la primitive de f définie par $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$; on ne demande pas une précision extrême mais de bien faire apparaître les éléments clés :



(c) Représenter graphiquement sur le repère ci-dessous la primitive de f définie par $G(x)=\int_2^x f(t)\,dt$; on ne demande pas une précision extrême mais de bien faire apparaître les éléments clés :