MA4N Semestrielle décembre 2012 Corrigé

ex 1

[/12]

a) $f(x) = \dfrac{x^2}{(x^3+1)^5} = x^2 \cdot (x^3+1)^{-5} = \dfrac{1}{3}\left[(x^3+1)^{-5} \cdot 3x^2\right]$

$\Rightarrow F(x) = \dfrac{1}{3} \cdot \left[\dfrac{(x^3+1)^{-4}}{-4}\right] = -\dfrac{1}{12} \dfrac{1}{(x^3+1)^4}$ (4)

b) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3+1} = \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{3x^2}{x^3+1}\right]$

$\Rightarrow F(x) = \dfrac{1}{3}\left[\ln|x^3+1|\right]$ (4)

c) $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^2} = \dfrac{x^3}{x^2} + \dfrac{1}{x^2} = x + \dfrac{1}{x^2}$

$\Rightarrow F(x) = \dfrac{x^2}{2} + \left(-\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{x}$ (4)

ex 2

[/17]

a) $\displaystyle\int_0^4 5x\sqrt{x^2+9}\,dx = \int_0^4 5 \cdot \frac{1}{2}\left[(x^2+9)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x\right] dx$

$= \dfrac{5}{2}\left[\dfrac{(x^2+9)^{3/2}}{3/2}\right]\Bigg|_0^4 = \dfrac{5}{\cancel{2}} \cdot \dfrac{\cancel{2}}{3}\sqrt{(x^2+9)^3}\Bigg|_0^4$

$= \dfrac{5}{3}\left[\sqrt{25^3} - \sqrt{9^3}\right] = \dfrac{5}{3}\left[(\sqrt{25})^3 - (\sqrt{9})^3\right] = \dfrac{5}{3}\left[5^3 - 3^3\right]$

$= \dfrac{5}{3} \cdot 98 = \dfrac{490}{3} = 163,\bar{3}$ (4+2)

b) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}\,dx = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos(x) \cdot [\sin(x)]^{-2}\,dx$

$= \dfrac{[\sin(x)]^{-1}}{-1}\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/2} = -\dfrac{1}{\sin(x)}\Bigg|_{\pi/6}^{\pi/2} = \left(-\dfrac{1}{\sin(\frac{\pi}{2})}\right) - \left(-\dfrac{1}{\sin(\frac{\pi}{6})}\right)$

$= -\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{1/2} = -1 + 2 = 1$ (3+1)

c) $\int_0^{\pi/2} x\cos(2x)\,dx = \frac{x}{2}\sin(2x)\Big|_0^{\pi/2} - \int \frac{1}{2}\sin(2x)\,dx$

$$\left[\begin{array}{ll} f'(x)=\cos(2x) \Rightarrow & f(x)=\frac{1}{2}\sin(2x) \\ g(x)=x \Rightarrow & g'(x)=1 \end{array}\right]$$

$= \frac{x}{2}\sin(2x)\Big|_0^{\pi/2} - \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\cos(2x)\right]\Big|_0^{\pi/2}$

$= \frac{x}{2}\sin(2x)\Big|_0^{\pi/2} + \frac{1}{4}\cos(2x)\Big|_0^{\pi/2}$

$= \left(\frac{\pi}{4}\sin(\pi) - 0\right) + \left(\frac{1}{4}\cos(\pi) - \frac{1}{4}\cos(0)\right)$

$= \frac{\pi}{4}\cdot 0 + \frac{1}{4}(-1) - \frac{1}{4}\cdot 1 = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$ (5+2)

[/5]

ex 3

$f(x) = 5e^{2x} - 3x = 5\frac{1}{2}(e^{2x}\cdot 2) - 3x$

$\Rightarrow F(x) = \frac{5}{2}e^{2x} - 3\frac{x^2}{2} + C$ (3)

$F(0)=2 \Leftrightarrow \frac{5}{2}e^0 + C = 2$

$\Leftrightarrow \frac{5}{2} + C = 2$

$\Leftrightarrow C = 2 - \frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow C = -\frac{1}{2}$

$F(x) = \frac{5}{2}e^{2x} - 3\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}$ (2)

ex 4

[/16]

a) $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sqrt{2x} = \frac{x^2}{16}$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{x^4}{256} \Leftrightarrow 512x = x^4$

$\Leftrightarrow 512x - x^4 = 0 \Leftrightarrow x(512 - x^3) = 0$

$x = 0$ ou $x^3 = 512$
$x = 8$

Donc les points d'intersection sont :
$I_1(0; f(0))$ et $I_2(8; f(8))$
$I_1(0; 0)$ $I_2(8; 4)$ (5)

b) $A = \int_0^8 f(x) - g(x)\,dx = \int_0^8 \sqrt{2x} - \frac{x^2}{16}\,dx$ (1)

$= \int_0^8 (2x)^{1/2}\,dx - \int_0^8 \frac{x^2}{16}\,dx$

$= \int_0^8 \frac{1}{2}[(2x)^{1/2} \cdot 2]\,dx - \frac{1}{16}\int_0^8 x^2\,dx$

$= \frac{1}{2}\frac{(2x)^{3/2}}{3/2}\Big|_0^8 - \frac{1}{16}\frac{x^3}{3}\Big|_0^8$ (3)

$= \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{(2x)^3}\Big|_0^8 - \frac{1}{3 \cdot 16}x^3\Big|_0^8 = \frac{1}{3}(4^3 - 0) - \frac{1}{3 \cdot 16}(8^3 - 0)$

$= \frac{64}{3} - \frac{32}{3} = \frac{32}{3}$ (2)

c) $V = \int_0^8 \pi f^2(x)\,dx - \int_0^8 \pi g^2(x)\,dx$ (2)

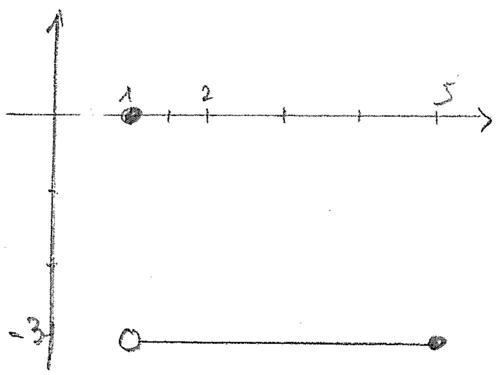
$= \pi\int_0^8 2x\,dx - \pi\int_0^8 \frac{x^4}{256}\,dx = \pi\left(x^2 - \frac{x^5}{1280}\right)\Big|_0^8$

$= \pi\left[64 - \frac{128}{5}\right] = \frac{192}{5}\pi = 38{,}4\pi$ (3)

ex 5

[/12]

a)



(1+3)

+

bonus...

Faux : $\Delta x = \frac{5-1}{n} = \frac{4}{n}$

$m_1 = m_2 = \dots = m_n = -3$

$M_1 = 1 ; \; M_2 = M_3 = \dots = M_n = 0$

d'où $s_n = (-3)\cdot\frac{4}{n} + (-3)\cdot\frac{4}{n} + \dots + (-3)\cdot\frac{4}{n}$ (n fois)

$= (-3)\cdot\frac{4}{\cancel{n}}\cdot \cancel{n} = -3\cdot 4 = -12$

$S_n = 1\cdot\frac{4}{n} + \underbrace{(-3)\cdot\frac{4}{n} + \dots + (-3)\cdot\frac{4}{n}}_{(n-1)\text{ fois}}$

$= \frac{4}{n} + (n-1)(-3)\frac{4}{n} = \frac{4}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\right)(-12)$

d'où $\lim_{n\to\infty} s_n = -12$ et $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\right)(-12)$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{4}{n} + (-12) \lim_{n\to\infty} \frac{n(1-\frac{1}{n})}{n}$

donc $= 0 + (-12)\cdot 1 = -12$

$-12 = \lim_{n\to\infty} s_n \leq \int_1^5 f(x)\,dx \leq \lim_{n\to\infty} S_n = -12$

et $\int_1^5 f(x)\,dx = -12$ c'est donc <u>FAUX</u>

b) f dérivable sur I $\Rightarrow$ f continue sur I (théo 3°)

$\Rightarrow$ f intégrable sur I (théo 4°)

c'est <u>VRAI</u>

(1+3)

c) Comme $f(x) = (x^2+1)^{16}$ est continue sur $\mathbb{R}$,
on peut appliquer le thm fondamental pour $t_0 = 8$,

et on en déduit que $F'(x) = f(x)$

Comme $f(x) > 0$, on a $F'(x) > 0$ (1+3)

et donc F str. ↗ par Cor AF

C'est donc faux !

[/9] ex 6

a) $h(0) = \frac{e^{0-1} + e^{-0+1}}{10} = \frac{e^{-1}+e}{10} = \frac{\frac{1}{e}+e}{10} = \frac{1+e^2}{10e} \cong 0,3086$

$\cong 30,86$ m (2)

b) $h'(x) = \frac{1}{10}\left(e^{x-1} \cdot (x-1)' + e^{-(x-1)}(-x+1)' \right)$

$= \frac{1}{10}\left(e^{x-1} - e^{-(x-1)}\right) = \frac{1}{10}\left(e^{x-1} - \frac{1}{e^{x-1}}\right) = \frac{1}{10}\left(\frac{(e^{x-1})^2 - 1}{e^{x-1}}\right)$

$= \frac{1}{10}\left(\frac{e^{2x-2}-1}{e^{x-1}}\right)$ (3)

$Z_{h'}$: $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{e^{2x-2}-1}{e^{x-1}} = 0 \Leftrightarrow e^{2x-2} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow e^{2x-2} = 1 \Leftrightarrow 2x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ [hm] $= 100$ [m]

TdS :

x		1	
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	↘	min	↗

le câble est le plus bas à 100 m de la base (4)

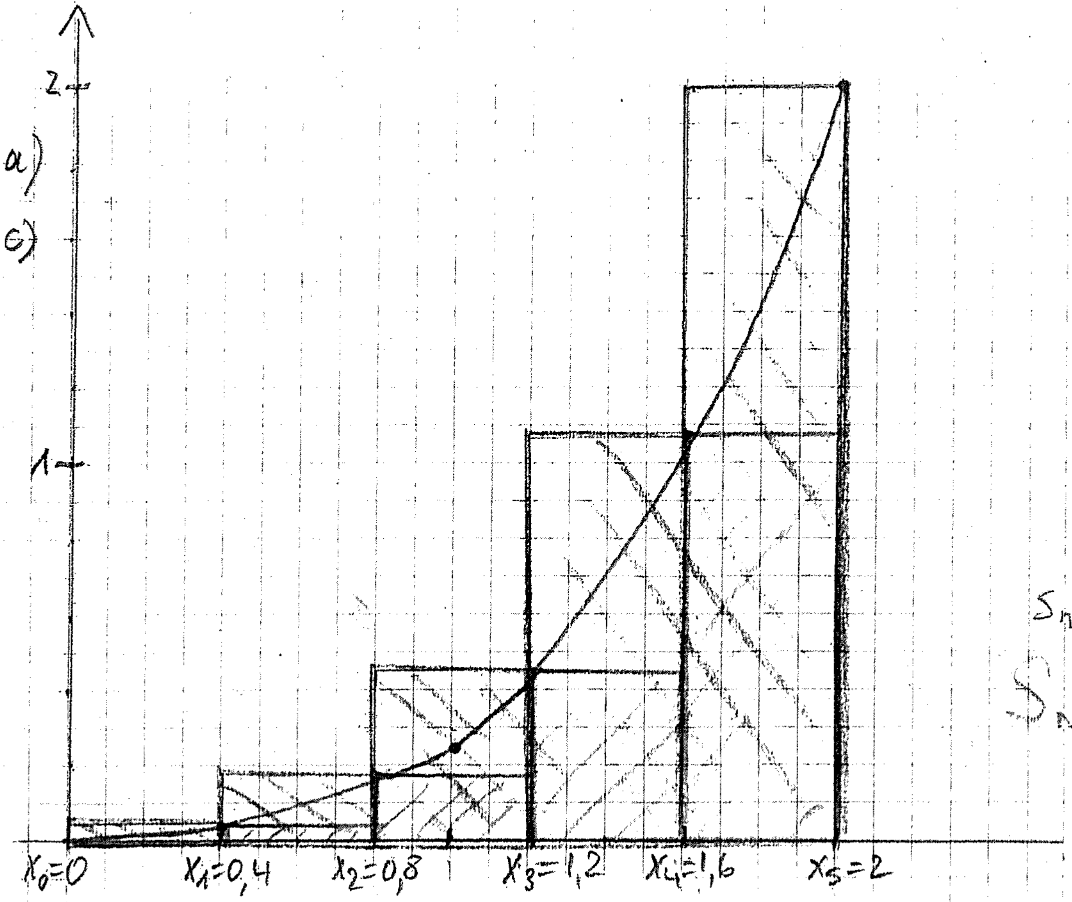
(cette hauteur vaut : $h(1) = \frac{1}{10} \cdot (e^0 + e^0) = \frac{2}{10} = 0,2$ [hm] $= 20$ [m])

ex7

[1/20]

a)

c)



1

s_n

S_n 2

2 b) $\Delta x = \frac{2-0}{5} = \frac{2}{5} = 0,4$

$x_0 = 0$; $x_1 = 0,4$; $x_2 = 0,8$; $x_3 = 1,2$; $x_4 = 1,6$; $x_5 = 2$

d) $s_5 = 0,4 \cdot f(0) + 0,4 \cdot f(0,4) + 0,4\, f(0,8) + 0,4\, f(1,2) + 0,4\, f(1,6)$

$= 0,4 \left[\frac{0,4^3}{4} + \frac{0,8^3}{4} + \frac{1,2^3}{4} + \frac{1,6^3}{4} \right] = \frac{16}{25} = 0,64$

$S_5 = 0,4 \cdot f(0,4) + 0,4\, f(0,8) + 0,4\, f(1,2) + 0,4\, f(1,6) + 0,4\, f(2)$

$= 0,4 \left[\frac{0,4^3}{4} + \frac{0,8^3}{4} + \frac{1,2^3}{4} + \frac{1,6^3}{4} + \frac{2^3}{4} \right] = \frac{36}{25} = 1,44$

3

d'où $$0,64 < \int_0^2 f(x)\,dx < 1,44$$

e) $\Delta x = \frac{2}{n}$ $\quad x_0 = 0$; $x_1 = \frac{2}{n}$; $x_2 = 2 \cdot \frac{2}{n} = \frac{4}{n}$; $x_3 = 3 \cdot \frac{2}{n} = \frac{6}{n}$; ...

2 $\quad x_{n-1} = (n-1)\frac{2}{n} = \frac{2(n-1)}{n}$; $x_n = n \cdot \frac{2}{n} = 2$

f) pas demandé

$m_1 = 0$; $m_2 = f\left(\frac{2}{n}\right)$; $m_3 = f\left(2 \cdot \frac{2}{n}\right)$; ... ; $m_n = f\left((n-1)\frac{2}{n}\right)$

$$s_n = \Delta x \cdot (m_1 + m_2 + \dots + m_n)$$
$$= \frac{2}{n}\left(f(0) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left((n-1)\frac{2}{n}\right)\right)$$
$$= \frac{2}{n}\left[0 + \frac{\left(\frac{2}{n}\right)^3}{4} + \frac{\left(2 \cdot \frac{2}{n}\right)^3}{4} + \dots + \frac{\left((n-1)\frac{2}{n}\right)^3}{4}\right]$$
$$= \frac{2}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{4}\left[0 + 1 + 2^3 + \dots + (n-1)^3\right]$$

en utilisant la formule $1^3 + 2^3 + \dots + m^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4}$

$$= \frac{16}{4n^4}\left[\frac{(n-1)^2((n-1)+1)^2}{4}\right]$$
$$= \frac{1}{n^4} \cdot \frac{(n-1)^2 \cdot n^2}{1}$$
$$= \frac{(n-1)^2 \cdot n^2}{n^{4\,2}} = \frac{n^2 - 2n + 1}{n^2}$$
$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} s_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2(1 - 2/n + 1/n^2)}{n^2} = 1$$

$M_1 = f\left(\frac{2}{n}\right)$; $M_2 = f\left(2 \cdot \frac{2}{n}\right)$; ... $M_n = f\left(n \cdot \frac{2}{n}\right)$

$$S_n = \Delta x (M_1 + \dots + M_n)$$
$$= \frac{2}{n}\left(f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(2 \cdot \frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(n \cdot \frac{2}{n}\right)\right)$$
$$= \frac{2}{n}\left(\frac{\left(\frac{2}{n}\right)^3}{4} + \frac{\left(2 \cdot \frac{2}{n}\right)^3}{4} + \dots + \frac{\left(n\left(\frac{2}{n}\right)\right)^3}{4}\right)$$
$$= \frac{2}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^3 \cdot \frac{1}{4}\left[1 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3\right]$$

avec la même formule

$$= \frac{16}{4n^4}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4}\right]$$
$$= \frac{1}{n^{4\,2}} \cdot \frac{n^2(n^2 + 2n + 1)}{1} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2}$$

5

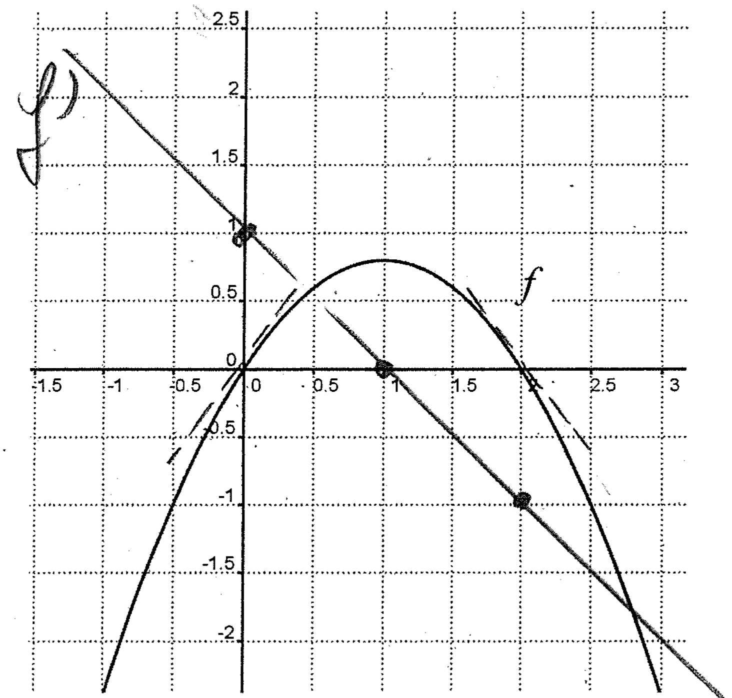
$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} S_n = \lim_{n \to \infty} \frac{n^2(1 + 2/n + 1)}{n^2} = 1$$

g) $\int_0^2 \frac{x^3}{4}\,dx = \frac{1}{4}\frac{x^4}{4}\Big]_0^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{16}{4}-0\right) = 1$ (2)

h) Dans ce cas, comme la fonction est toujours positive dans l'intervalle [0; 2], l'intégrale et l'aire sont égale, donc $A = I = 1$ (2)

ex7 (a) Représenter graphiquement sur le repère ci-dessous la dérivée de f ; on ne demande pas une précision extrême mais de bien faire apparaître les éléments clés :

(3)

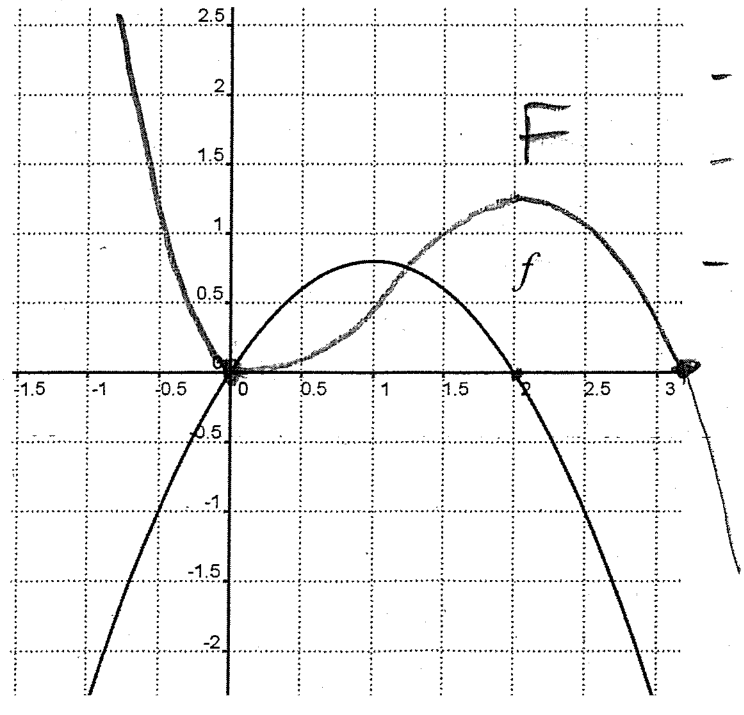


- $f'(1)=0$
- $f'(2)\cong-1$
- $f'(0)=1$
- $f'(x)<0$ si $x>1$
- $f'(x)>0$ si $x<1$

(- f' droite (probablement...

(b) Représenter graphiquement sur le repère ci-dessous la primitive de f définie par $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$; on ne demande pas une précision extrême mais de bien faire apparaître les éléments clés :

(3)



- $F(0)=0$
- 2^e zero vers 3...
- $F(x)<0$ si $x<0$

$F(x)>0$ si $0<x<3$

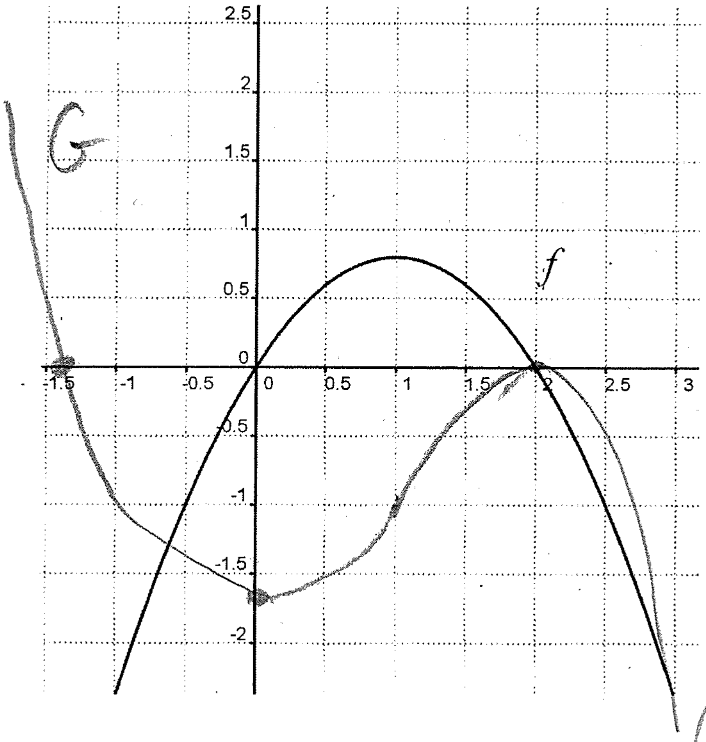
aussi : F max local en x=2

pt inflexion en x=1

F surement d°3

(c) Représenter graphiquement sur le repère ci-dessous la primitive de f définie par ; on ne $G(x)=\int_{2}^{x} f(t)\,dt$ demande pas une précision extrême mais de bien faire apparaître les éléments clés :

3



- $G(2)=0$
- même courbe que F décalée verticalement
- $G(x)<0$ si $x>2$
- G

aussi : G min local en $x=0$

G sûrement d°3

pt inflexion en $x=1$