tot 51 pts

MA4N-403   Corrigé du travail n° 3   Février 2013

[/12]

(1) Soit x, y les 2 nombres positifs

On a : $x \cdot y = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{x}$

On veut : $x^2 + y^2$ à optimiser

On réduit à une variable. $f(x) = x^2 + \left(\frac{4}{x}\right)^2$ (3)

Dérivée : $f'(x) = 2x + 2\left(\frac{4}{x}\right) \cdot \left(\frac{4}{x}\right)' = 2x + \frac{8}{x} \cdot 4\left(\frac{1}{x}\right)'$

$$= 2x + \frac{32}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x - \frac{32}{x^3} = \frac{2(x^4 - 16)}{x^3}$$ (3)

Tableau de signes :

x		-2		0		2		4
$2(x^4-16)$	+	0	−	−	−	0	+	
x^3	−	−	−	0	+	+	+	
$f'(x)$	−	0	+	‖	−	0	+	
$f(x)$	↘	min	↗		↘	min	↗	

valeurs positives (3)

Réponse :

a) Pour des valeurs positives le minimum est atteint pour $x = 2$, donc $y = \frac{4}{2} = 2$

et il vaut $2^2 + 2^2 = 8$

b) Comme les 2 nombres doivent être positifs le max est atteint pour $x = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{0}$ ∄

ou

pour $x = 4 \Rightarrow y = \frac{4}{4} = 1$ ok

le max vaut alors $4^2 + 1^2 = 17$

[/12]

(3)

(a) $\overline{A}^{26}_{12} = 26^{12} \cong 9,54 \cdot 10^{16}$ (2)

(b) $A^{26}_{12} = \frac{26!}{(26-12)!} = \frac{26!}{14!} \cong 4,63 \cdot 10^{15}$ (2)

(c) $\underbrace{20 \cdot 20}_{\text{2 consonnes au début}} \cdot \underbrace{6 \cdot 6 \cdot 6}_{\text{trois voyelles à la fin}} \cdot \underbrace{26^7}_{\text{7 autres lettres quelconques}} \cong 6,94 \cdot 10^{14}$ (4)

(d) idem, sauf qu'il faut placer une voyelle en 3e place et une consonne à la place 9 :

$\underbrace{20 \cdot 20}_{\text{début avec consonnes}} \cdot \underbrace{6}_{\text{voyelle}} \cdot \underbrace{26^5}_{\text{qcq}} \cdot \underbrace{20}_{\text{consonne}} \cdot \underbrace{6 \cdot 6 \cdot 6}_{\text{fin avec voyelles}} \cong 1,23 \cdot 10^{14}$ (4)

[/5]

(2)

(a) $C^9_6 = \frac{9!}{6!(9-6)!} = \frac{9!}{6! \cdot 3!} = 84$ (2)

(b) $C^8_5 = \frac{8!}{5!\,3!} = 56$ (on prend la boule 5 [1 choix] et on tire 5 boules parmi les 8 restantes) (3)

[/7]

(4)

(a) $\underbrace{C^4_2}_{\text{2 dames parmi 4, sans ordre}} \cdot \underbrace{C^{32}_6}_{\text{6 cartes parmi les non-dames, sans ordre}} = 6 \cdot 906192 = 5437152$

(3)

(b) au moins 2 dames = tout − [0 dame ou 1 dame]

$$= \underbrace{C_8^{36}}_{\substack{\text{8 parmi 36} \\ \text{sans ordre}}} - \Big[\underbrace{C_8^{32}}_{\substack{\text{8 parmi 32} \\ \text{non-dames}}} + \underbrace{4}_{\substack{\text{choix d'une} \\ \text{dame}}} \cdot \underbrace{C_7^{32}}_{\substack{\text{choix de 7 cartes} \\ \text{parmi 32 non-dames}}} \Big]$$

$$= 30260340 - [10518300 + 4 \cdot 3365856]$$

$$= 6278616$$

(4)

(5)

[7] (a) $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & -5 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = N$$ (3)

(b) $$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & +0{,}14 & 0{,}71 & 0{,}71 \\ 0.5 & 0{,}36 & -0{,}21 & 0{,}29 \\ 0 & -0{,}29 & -0{,}43 & -0{,}43 \\ 0.5 & 0{,}21 & 0{,}07 & -0{,}43 \end{pmatrix}$$ (2)

(c) $$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = M^{-1} \cdot N = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Donc $x = 2$
$y = 3$
$z = -1$
$t = 1$ (2)

[/8]

(6) $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\det M = 3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 0 \cdot |\ldots| + 0 \cdot |\ldots|$

$= 3(1-4) = -9$ (2)

$B = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -3 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (3)

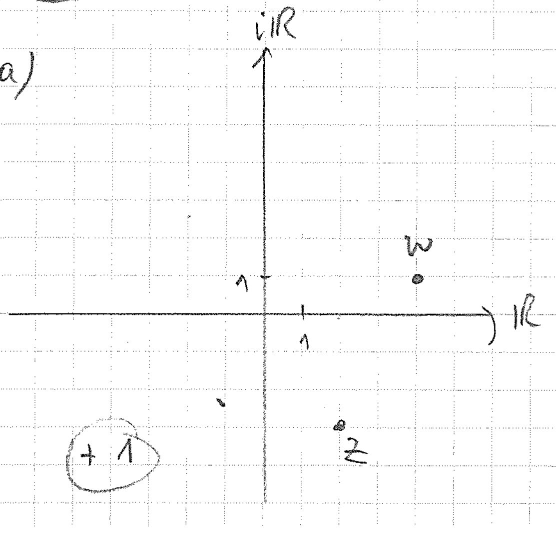
$B^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -3 & -6 & 1 \\ -6 & -3 & 2 \end{pmatrix}$ (1)

$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \cdot B^t = \frac{1}{-9} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ -3 & -6 & 1 \\ -6 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -1/9 \\ 2/3 & 1/3 & -2/9 \end{pmatrix}$

(2)

[max +5] (7 fac)

a)



(+1)

b) $-3z = -6 + 9i$

$z + w = 6 - 2i$ (+2)

$z \cdot w = 8 + 2i - 12i - 3i^2 = 8 - 10i + 3$
$= 11 - 10i$

c) $z^2 + 2z + 5 = 0$ (+2)

$\Delta = 4 - 20 = -16$

$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16i^2}}{2}$

$= -1 \pm 2i$