Travail intermédiaire de mathématiques n°1

Date : 11 octobre 2012

Durée : 90 minutes

Enseignant : Jean-Marie Delley

Cours : 4Ma1DF03

Nom: ....

Prénom: ....

Groupe: ....

Matériel autorisé

- Calculatrice personnelle TI82
- Table numérique non annotée

Remarques

- Il ne suffit pas de répondre par un nombre ou par oui ou par non; il est important de justifier les réponses et de donner tous les détails des calculs.
- Si vous utilisez la calculatrice pour déterminer directement un résultat, indiquez-le par un « C »!
- Indiquez vos initiales en haut de chaque page

Informations chiffrées après correction du maître

Notations (une coche par faute) :

Fautes :	→ .... / ....

Français (une coche par faute) [bonus] :

Fautes :	→ .... / ....

Total des points des exercices : .... / ....

Total des points de l'épreuve : .... / ....

Note : / 6

Note du corrigé: / 6

Crédit obtenu avec ce corrigé :

Crédit éventuel d'un corrigé précédent :

Note finale du travail: / 6

Informations relatives au corrigé du travail par l'élève

- sur des feuilles A4 au format paysage, sur 3 colonnes et pour chaque erreur, l'élève:

dans la colonne 1: recopie l'erreur	dans la colonne 2: explique en quoi c'est faux (et non pourquoi c'est faux !)	dans la colonne 3: corrige l'erreur

- le maître corrige le corrigé et lui attribue une note indicative qui n'entre pas en compte dans le calcul de la moyenne; par contre:
  - si la note du corrigé est 5.5 ou 6 : la note du travail est augmentée de 0.5
  - si la note du corrigé est 4.5 ou 5 : la note du travail n'est pas modifiée et un crédit de 0.25 est à valoir pour le prochain processus d'évaluation de type «épreuve 90' »
  - si la note du corrigé est inférieure ou égale à 4 : la note du travail n'est pas modifiée
- informations complémentaires sur http://math.bibop.ch/generalites/evaluation/corriges-d-epreuves

Début du travail

Exercice 1 (environ 3 points)

Calculer les limites suivantes et interpréter graphiquement le résultat :

(a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-6x+8}{x^2+x-6}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-6x+8}{x^2+x-6}$

(c) $\lim\limits_{x\to -\infty} x^5-x^2$

(d) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{2x-8}{\sqrt{13-x}-3}$

Exercice 2 (environ 3 points)

Tracer une représentation graphique d'une fonction satisfaisant à toutes les conditions suivantes:

(a) $Z_f=\{-1\,;3\}$

(b) L'image de 0 est -3

(c) $\lim\limits_{x\to -3} f(x)=-4$

(d) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ n'existe pas

(e) $\lim\limits_{x\to 5^-} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 5^+} f(x)=+\infty$

(f) $x=-5$ est une asymptote verticale de f

(g) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=-2$

(h) $y=x+1$ est une asysmptote oblique de f à $+\infty$

Exercice 3 (environ 4.5 points)

Pour chacune des fonctions f définies ci-dessous, déterminer une primitive F; donner les réponses simplifiées au maximum et sans exposant négatif ou fractionnaire :

(a) $h(x)=-2x^3+\dfrac{x^2}{5}-8$

(b) $h(x)=\dfrac{x^8+1}{x^7}$

(c) $h(x)=\sqrt{6-5x}$

(d) $h(x)=15x^2(2x^3-1)^4$

(e) $h(x)=\dfrac{x^2}{(x^3+1)^2}$

(f) $h(x)=\cos^3(x)\sin(x)$

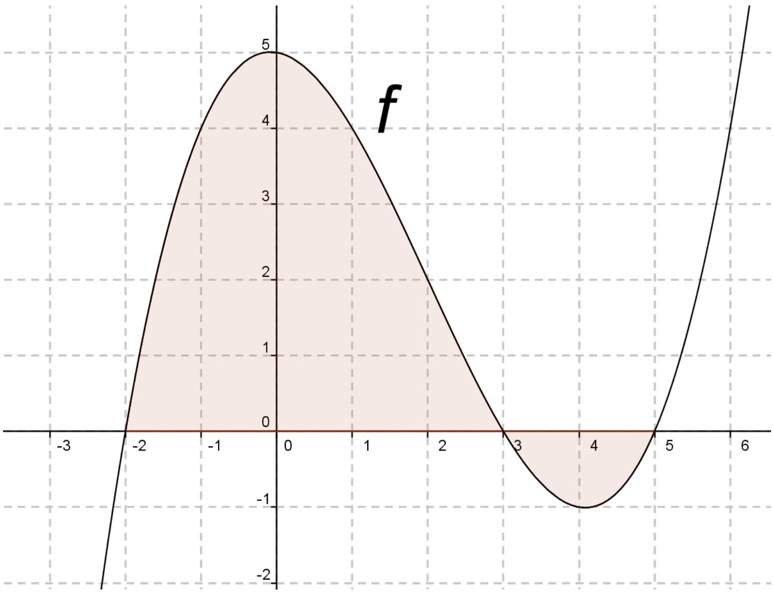
Exercice 4 (environ 2.5 points)

Soit $f(x)=\begin{cases}-1\,,\text{si} & x\in]2\,;4]\\ 0\,,\text{si} & x=2\end{cases}$

Montrer en calculant explicitement et en détail $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ que $\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x=-2$

Exercice 5 (environ 1 point)

On considère la surface représentée ci-dessous :



Poser le calcul qui permettrait de calculer l'aire de cette surface.

Remarque : il n'y a aucun calcul à faire !

Exercice 6 (environ 3 points)

Vrai ou faux? Justifier.

(a) Les fonctions réelles *F* et *G* définies par $F(x)=(x-2)^2$ et $G(x)=1-4x+x^2$ sont deux primitives de la fonction réelle *f* définie par $f(x)=2\text{x}-4$

(b) Si *f* est intégrable sur un intervalle I, alors *f* est dérivable sur I

(c) Soit *h* une fonction de la forme $h=f\cdot g$, *F* une primitive de *f et G* une primitive de *g.* Alors $F\cdot G$ est une primitive de *h.*

Exercice 7 (environ 4 points)

On considère le théorème fondamental du calcul différentiel et intégral.

(a) Enoncer complètement ce théorème, en identifiant clairement hypothèse(s) et conclusion(s).

(b) On donne une démonstration du théorème fondamental; commencer par représenter la situation sur un schéma dans lequel doivent apparaître toutes les constantes et variables impliquées dans la démonstration :

(c) Dans la démonstration ci-dessous, , remplacer les […...] qui manquent (directement sur l'énoncé) et donner les [ARG] (sur votre feuille de réponse) :

Cherchons à calculer $\lim_{h \to o} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$, car [ARG 1]

$$\lim_{h \to o} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h \to o} \frac{[\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots] - \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt}{h},$$

• car [ARG 2]

$$= \lim_{h \to o} \frac{[\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots]}{h}, \text{ car [ARG 3]}$$

Appliquons le théorème de la moyenne à f sur […........................]; c'est possible car [ARG 4]

alors il existe un $c \in [x; x+h]$ tel que $\int_{x}^{x+h} f(t)\,dt$ = […....................] car [ARG 5]

On a donc

$$\lim_{h \to o} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h \to o} \frac{[\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots]}{h}$$

$$= \lim_{h \to o} f(c), \text{ car [ARG 6]}$$

Or $\lim_{h \to o} f(c) = \lim_{[\ldots\ldots\ldots]} f(c)$, car [ARG 7]

= […...................] , car [ARG 8]

donc $\lim_{h \to o} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x)$, cqfd.