Mini-test de mathématiques n°1	
Date : 18 septembre 2014 Durée : 20' Enseignant : Jean-Marie Delley Cours : 4Ma1DF03 **Nom**: .... **Prénom**: .... **Groupe**:	Matériel autorisé ○ Calculatrice personnelle ○ Table numérique non annotée Remarques ○ Il ne suffit pas de répondre par un nombre ou par oui ou par non; il est important de justifier les réponses et de donner tous les détails des calculs. ○ Si vous utilisez la calculatrice pour déterminer directement un résultat, indiquez-le par un « C »! Note : / 6

Début du travail

Exercice 1

Soit la fonction fonction f définie par $f(x)=x^3$.

Compléter les [……..] qui manquent :

On considère un partage de [0;1] en n sous-intervalles équidistants.
On donne ci-dessous certains éléments d'un calcul de limite de <u>petite somme</u> de Riemann pour déterminer l'aire de la surface comprise entre une représentation graphique de la fonction f , l'axe [.0X.] et les droites d'équations y=0, […….X = 0……..] et […….X = 1……].

Début du calcul

On partage [...[0;1]........] en n intervalles équidistants de longueur [.......$\frac{1}{n}$...........]

et on note $\Delta x=$ [......$\frac{1}{n}$..................]

On pose : $x_0=$[..........0.................]

$x_1=$[.........$\frac{1}{n}$...................]

$x_2=$[.........$\frac{2}{n}$...................]

$x_3=$[.........$\frac{3}{n}$...................]

…

$x_{n-1}=$[.........$\frac{n-1}{n}$...................]

$x_n=$[.........$\frac{n}{n}$...................]

/12

On calcule la somme des aires des ~~grands~~ petits rectangles :

$$S_n = \Delta x\, f(x_{[0]}) + \Delta x\, f(x_{[1]}) + \ldots + [\Delta x f(x_{n-1})]$$ 2

$$= \Delta x\,([f(x_0)+f(x_1)+\ldots+f(x_{n-1})])$$ 2

$$= \frac{1}{n}\cdot\left(f([0]) + f\left(\left[\frac{1}{n}\right]\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \ldots + f\left(\left[\frac{n-1}{n}\right]\right)\right)$$ 2

$$= \frac{1}{n}\cdot\left(([0])^3 + \left(\left[\frac{1}{n}\right]\right)^3 + \ldots + \left(\left[\frac{n-1}{n}\right]\right)^3\right)$$ 2

$$= \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{0^3}{n^3} + \left(\left[\frac{1^3}{n^3}\right]\right) + \left(\left[\frac{2^3}{n^3}\right]\right) + \ldots + \left(\left[\frac{(n-1)^3}{n^3}\right]\right)\right)$$ 2

$$= \frac{1}{[n^4]}\cdot\left(0^{[3]} + [1^3] + [2^3] + \ldots + [(n-1)^3]\right)$$ 2

Dans la table numérique, on trouve la formule suivante : $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

On obtient alors:

$$s_n = \frac{1}{[n^4]}\cdot\left(\frac{[(n-1)^2 \cdot n^2]}{[4]}\right) = \frac{[(n-1)^2 n^2]}{[4n^4]}$$ 2

Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n-1)^2 n^2}{4n^4}$$

$$= \left[\lim_{n\to\infty} \frac{(n^2-2n-1)n^2}{4n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4-2n^3-n^2}{4n^2}\right]$$ 4

$$= \left[\lim \frac{n^4(1-2/n-1/n^2)}{4n^4}\right] = \frac{1}{4}$$

On admet le même type de calcul pour les grandes sommes où on trouverait : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{4}$

D'où : $I = \int_{[0]}^{[1]} [x^3]\,dx = \left[\frac{1}{4}\right]$ 2