/14

Question 1 (environ 14 points)

Pour chaque fonction ci-dessous, déterminer une primitive en donnant une réponse ne contenant aucun exposant négatif ou fractionnaire et sous la forme la plus simplifiée possible :

(a) $f(x)=2x\sqrt{x} = 2x \cdot x^{1/2}$

$= 2x^{3/2} = 2\left[x^{3/2}\right]$

$\Rightarrow F(x) = 2\left[\frac{x^{5/2}}{5/2}\right] = 2 \cdot \frac{2}{5} x^{5/2} = \frac{4}{5}\sqrt{x^5}$

$\left(\begin{array}{l} = \frac{4}{5}\sqrt{x^4 \cdot x} \\ = \frac{4}{5} x^2 \sqrt{x} \end{array}\right)$

2

(b) $f(x)=4x^3 \cdot \sqrt{x^4+3} = (x^4+3)^{1/2} \cdot 4x^3$

$\Rightarrow F(x) = \frac{(x^4+3)^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3}\sqrt{(x^4+3)^3}$

3

$\left(\begin{array}{l} = \frac{2}{3}\sqrt{(x^4+3)^2}\sqrt{x^4+3} \\ = \frac{2}{3}(x^4+3)\sqrt{x^4+3} \end{array}\right)$

(c) $f(x)=\dfrac{2x^3}{(x^4+3)^5} = 2x^3 \cdot (x^4+3)^{-5}$

$$= \frac{1}{2}\left[(x^4+3)^{-5} \cdot 4x^3\right]$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{(x^4+3)^{-4}}{-4}\right] = -\frac{1}{8}\,\frac{1}{(x^4+3)^4}$$

3

(d) $f(x)=\dfrac{x^4+3}{2x^3} = \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{2x^3} = \dfrac{1}{2}(x) + \dfrac{3}{2}(x^{-3})$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}\,\frac{x^{-2}}{-2}$$

$$= \frac{x^2}{4} - \frac{3}{4x^2}$$

3

(e) $f(x)=\frac{2x^3}{x^4+3}$ $=\frac{1}{2}\left[\frac{4x^3}{x^4+3}\right]$

$\Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}\ln|x^4+3|$

3

Question 2 (environ 10 points)

/10

Calculer la valeur exacte des intégrales suivantes et donner le résultat sous forme exacte et réduite le plus possible :

(a) $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x-\frac{\pi}{2})\,dx$ $f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}\left[\sin(2x-\frac{\pi}{2})\cdot 2\right]$

$\Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}\left[-\cos(2x-\frac{\pi}{2})\right]$

donc $I=\frac{1}{2}\left(-\cos(2x-\frac{\pi}{2})\right)\Big|_0^{\pi/4}$

$=\frac{1}{2}(-\cos(0))-\frac{1}{2}(\underbrace{-\cos(-\frac{\pi}{2})}_{0})$

$=\frac{1}{2}(-1)$

$=-\frac{1}{2}$

4

(b) $I = \int_1^e \frac{1}{3x}\,dx$

$f(x) = \frac{1}{3x} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{x}\right]$

$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{3}\ln|x|$

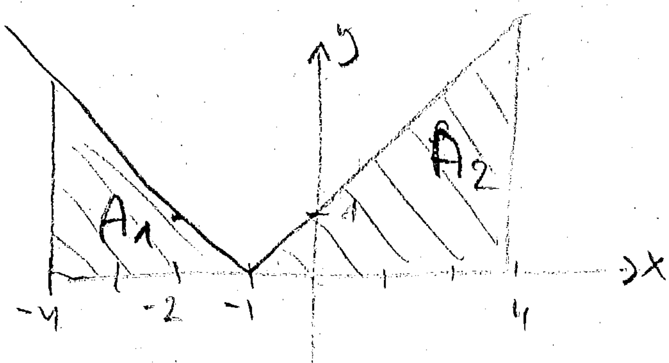
(ou $f(x) = \frac{1}{3}\left(\frac{3}{3x}\right)$ ou $F(x) = \frac{1}{3}\ln|3x|$)

d'où : $I = \frac{1}{3}\left(\ln|x|\,\Big|_1^e\right) = \frac{1}{3}\left(\ln(e) - \ln(1)\right)$

$= \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}$

3

c) $I = \int_{-4}^{4} |x+1|\,dx$



$I = A_1 + A_2 = \frac{3\cdot 3}{2} + \frac{5\cdot 5}{2} = \frac{9}{2} + \frac{25}{2} = \frac{34}{2} = 17$

3

/14

Question 3 (environ 14 points)

On considère la fonction f définie par $f(x)=e^{-x}$.

(a) Déterminer la primitive F de f définie telle que $F(0) = 0$.

$f(x) = e^{-x} = -[e^{-x}\cdot(-1)] \Rightarrow F(x) = -[e^{-x}] + c$ ②

on veut $F(0) = 0 \Leftrightarrow -e^{-0} + c = 0$

$\Leftrightarrow -1 + c = 0$

$\Leftrightarrow c = 1$

d'où $F(x) = -e^{-x} + 1$ ②

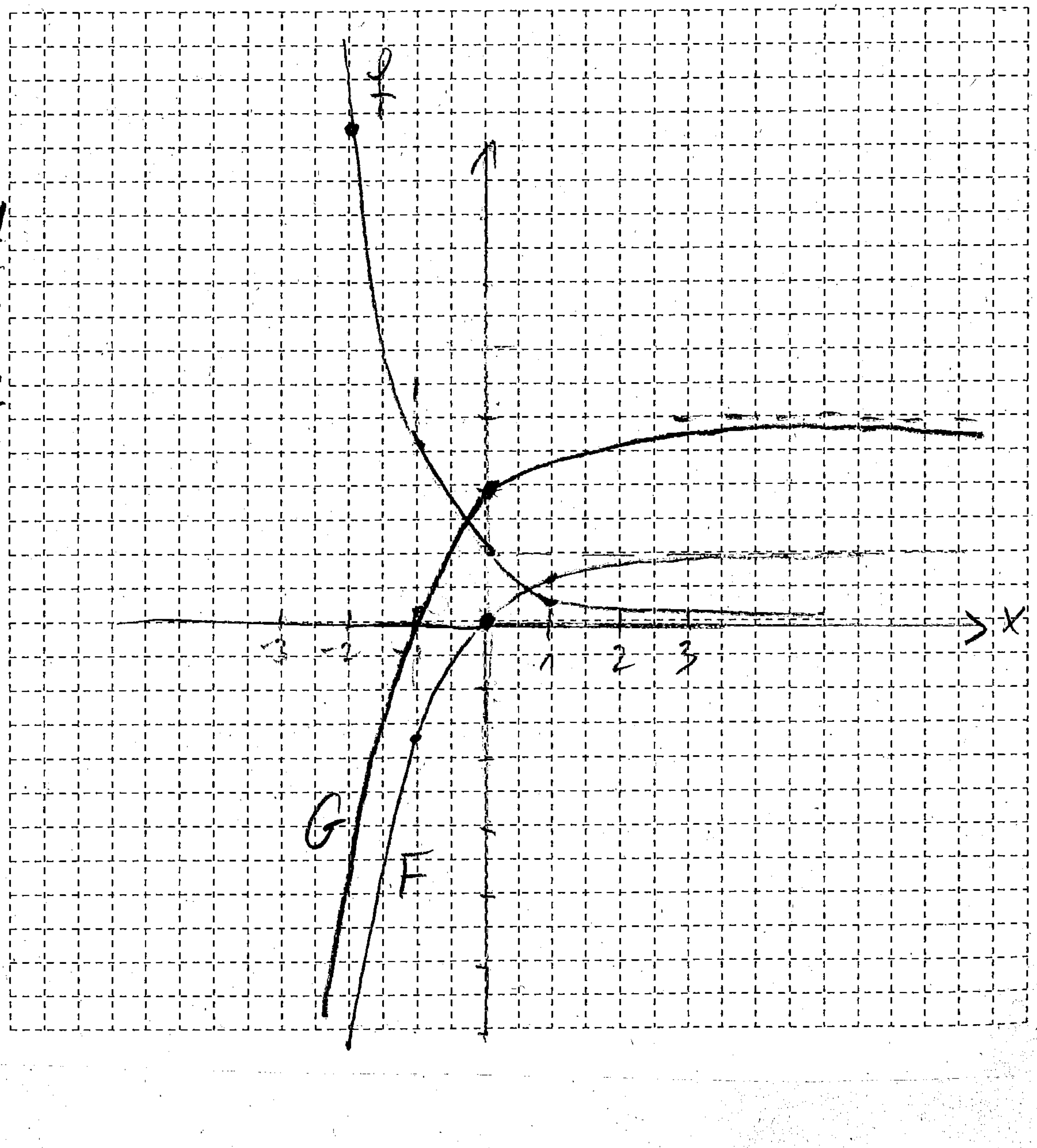
(b) Esquisser f et F dans le même repère ci-dessous, en faisant apparaître les éléments clés.

(c) Représenter graphiquement dans le même repère la primitive G de f telle que $G(0) = +2$.

$F(0) = 1$

$F(1) = 1 - \frac{1}{e} \cong 0{,}63$

$F(-1) = 1 - e \cong -1{,}7$



f : ②

F : ②

G : ①

On considère maintenant la surface S délimitée par la représentation graphique de f, les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$ et l'axe Ox.

(d) Calculer l'aire de S ; donner un résultat exact. et approché arrondi au centième

$$S = \int_{-1}^{0} e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_{-1}^{0} = (-e^{0}) - (-e^{1}) = (-1) - (-e)$$
$$= e - 1 \cong 1{,}72$$

2

On considère maintenant la représentation graphique de f entre les points (-1 ; f(-1)) et (0 ; f(0)) et on la fait pivoter autour de l'axe Ox. On obtient un volume de révolution.

(e) Calculer ce volume.

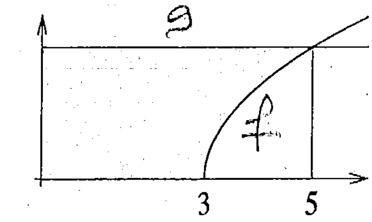
$$V = \pi \int_{-1}^{0} f^2(x)\,dx = \pi \int_{-1}^{0} (e^{-x})^2\,dx = \pi \int_{-1}^{0} e^{-2x}\,dx$$
$$= \pi\left(-e^{-2x}\cdot\frac{1}{2}\right)\Big|_{-1}^{0} = \pi\left(-\frac{e^{0}}{2} - \left(-\frac{e^{2}}{2}\right)\right) = \pi\left(-\frac{1}{2} + \frac{e^{2}}{2}\right)$$
$$= \pi\left(\frac{e^{2}-1}{2}\right) \cong 10{,}04$$

3

/6

Question 4 (environ 6 points)

On considère la surface délimitée dans le premier quadrant par les axes de coordonnées et les courbes des fonctions f et g définies par $f(x)=\sqrt{2x-6}$ et $g(x)=2$ (voir ci-contre)



Calculer le volume de révolution engendré par la rotation de cette surface autour de l'axe Ox. Donner un résultat exact et approché au centième

$$V = \pi \int_0^5 g^2(x)\,dx - \pi \int_3^5 f^2(x)\,dx$$ (3)

$$= \pi \left[\int_0^5 4\,dx - \int_3^5 2x-6\,dx \right] = \pi \left[4x\Big|_0^5 - (x^2-6x)\Big|_3^5 \right]$$ (2)

$$= \pi \left[(20-0) - \left[(25-30) - (9-18) \right] \right]$$

$$= \pi \left[20+5-9 \right] = 16\pi \cong 50{,}27$$ (1)

Question 5 (environ 3 points)

Vrai ou faux? Justifier.

Vous pouvez utiliser un contre-exemple vu en cours, mais il est demandé d'expliciter en détail les calculs nécessaires.

(a) Si $f(x) > 0$ pour tout x réel, alors $\int_0^x f(t)dt > 0$ pour tout x réel.

Faux ; contre-exemple : $f(x) = 1$ est $> 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

mais $\int_0^{-1} 1\,dx = -\int_{-1}^{0} 1\,dx = -\left(x\Big|_{-1}^{0}\right)$
$= -(0-(-1))$
$= -1 < 0$!

3

(b) La fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ possède une primitive.

Vrai ; cette fonction est continue [car dérivable : $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x$] sur tout $\mathbb{R}$

donc, par théo fond. I,
il existe une fonction $F(x) = \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$ qui
est primitive de $f(x)$ [pour tout choix de $x_0 \in \mathbb{R}$]

3

(c) Soit F la fonction définie par $F(x)=\int_0^x \frac{1}{(t^2+1)^{100}}dt$. Alors F est strictement décroissante sur R.

Faux ; $F'(x) = \frac{1}{(x^2+1)^{100}}$ par thm fond I

donc $F'(x) > 0$ car

$(x^2+1)^{100}$	+ + +
$F'(x)$	+ + +
$F(x)$	$\nearrow$

donc $F(x)$ str $\nearrow$

par Cor. thm AF

3

ex 6 a) $F'(x) = 2\cos(x)(-\sin(x)) = -2\cos(x)\sin(x)$.

[/5]

$G'(x) = -2\sin(x)\cos(x)$

les 2 dérivées sont égales donc F et G sont primitives de la même fonction $f(x) = -2\sin(x)\cos(x)$ 3

b) $F'(x) - G'(x) = \cos^2(x) - (-\sin^2(x))$

$= \cos^2(x) + \sin^2(x)$

$= 1$

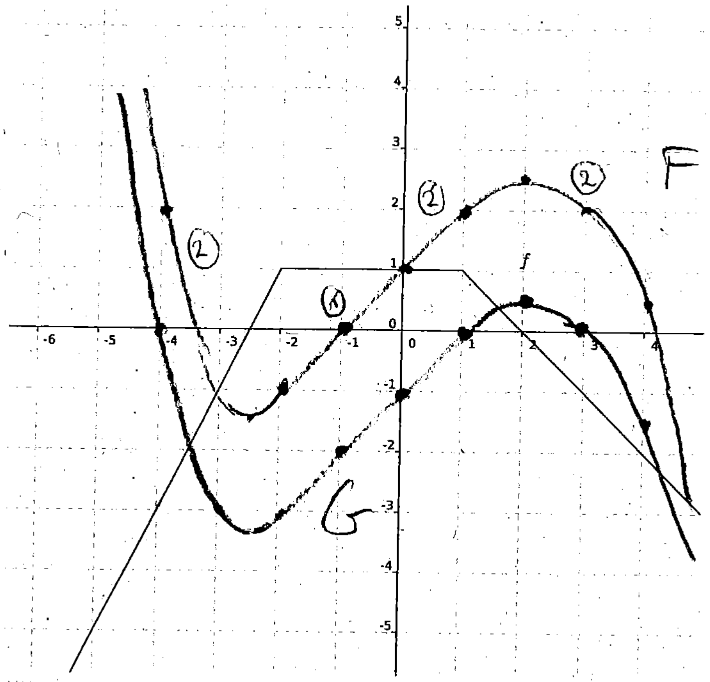
2

/9

Question 7 (environ 9 points)
On considère une fonction f donnée par une représentation graphique.

(a) Représenter graphiquement sur ce même repère la fonction F définie $F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)\,dt$ sur l'intervalle [-4;4].

F(-1)=0
F(0)=1
F(1)=2
F(2)=2,5 max
F(4)=0,5
F(-2)=-1
F(-3)=-1
F(-4)=2



F: 7
G: 2

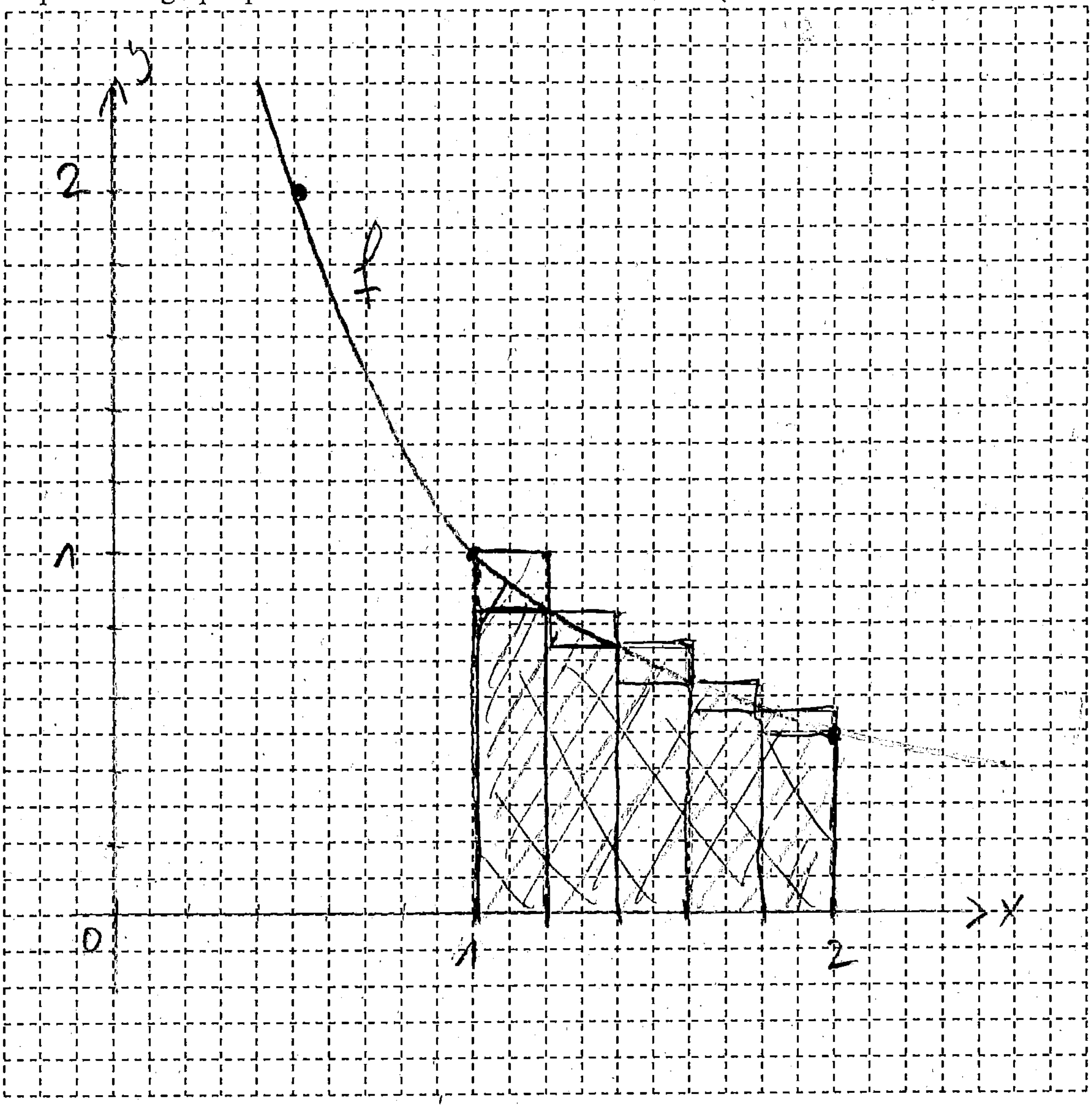
G(1)=0

/14

Question 7 (environ 14 points)

On considère la fonction f définie sur [1 ; 2] par $f(x)=\frac{1}{x}$, et D la surface délimitée par une représentation graphique de f, l'axe Ox et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

(a) Représenter graphiquement cette surface ~~sans la hachurer~~ (unité = 10 carrés).



a)
f: 1

c)
S_n 2

S_n

Partie A : On considère un partage de l'intervalle [1 ; 2] en 5 sous-intervalles équidistants.

(b) Déterminer les valeurs de x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 et x_5 ainsi que la longueur Δx de chaque sous-intervalle.

$x_0 = 1$
$x_1 = 1,2$
$x_2 = 1,4$
$x_3 = 1,6$
$x_4 = 1,8$ $x_5 = 2$

$\Delta = 0,2$ $\left(= \frac{2-1}{5}\right)$

1

(c) Représenter sur le même repère qu'en a) les petites et grandes sommes de Riemann en identifiant clairement chacune d'entre-elles par une couleur spécifique.

(d) Calculer ces grandes et petites sommes, résultats au millième :

$S_5 = 0{,}2 \cdot f(1{,}2) + 0{,}2 f(1{,}4) + \dots + 0{,}2\, f(2)$

$= 0{,}2 \left[\frac{1}{1{,}2} + \frac{1}{1{,}4} + \dots + \frac{1}{2} \right]$

en fractions $= \frac{1}{5} \left[\frac{1}{\frac{6}{5}} + \frac{1}{\frac{7}{5}} + \dots + \frac{1}{\frac{10}{5}} \right] = \frac{1}{5} \left[\frac{5}{6} + \frac{5}{7} + \frac{5}{8} + \frac{5}{9} + \frac{5}{10} \right]$

$= \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{10} \cong 0{,}646$

$S_5 = \frac{1}{5} \left[\frac{1}{\frac{5}{5}} + \dots + \frac{1}{\frac{9}{5}} \right] = \frac{1}{5} \left[\frac{5}{5} + \frac{5}{6} + \dots + \frac{5}{9} \right] = \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{9} \cong 0{,}746$

1

(e) Déduire de (d) un Donner l'encadrement de l'aire A de D.

$0{,}645 \leq A \leq 0{,}74$

1

Car $S_5 \cong 0{,}64563\dots \Rightarrow$ arrondi au millième : 0,646

mais encadrement $0{,}645 < A$!

Partie B : On considère maintenant un partage de l'intervalle [1 ; 2] en n sous-intervalles égaux.

(f) Déterminer les valeurs de $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$ ainsi que la longueur Δx de chaque sous-intervalle.

$\Delta x = \frac{1}{n}$

$x_0 = 1$

$x_1 = 1 + \frac{1}{n}$

$x_2 = 1 + \frac{2}{n}$

$\vdots$

$x_{n-1} = 1 + \frac{n-1}{n}$

$x_n = 1 + \frac{n}{n} = 2$

1

(g) Montrer que la hauteur du premier petit rectangle (de base $[x_0 ; x_1]$) est égale à $\dfrac{n}{n+1}$.

Cette hauteur est égale à $f(x_1) = f(1+\frac{1}{n}) = \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}}$

$= \dfrac{1}{\frac{n+1}{n}}$

$= \dfrac{n}{n+1}$

1

(h) Montrer que la petite somme de Riemann vaut $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}$

$$S_n = \Delta x \cdot [f(x_1) + \ldots + f(x_n)]$$
$$= \frac{1}{n} \cdot \left[\frac{n}{n+1} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \ldots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}} \right]$$
$$= \frac{1}{n}\left[\frac{n}{n+1} + \frac{n}{n+2} + \ldots + \frac{n}{n+n} \right]$$
$$= \frac{1}{\cancel{n}} \cdot \cancel{n} \left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \right]$$

4

(i) N'essayez pas de calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}$, mais déterminer la valeur exacte de l'aire de D en utilisant une autre démarche (plus directe !).

$$A = \int_1^2 f(x)\,dx = \int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|\Big|_1^2 = \ln(2) - \underbrace{\ln(1)}_{=0}$$
$$= \ln(2)$$
$$\cong 0,69$$

2

(j) Pouvez-vous en déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}$?
Expliquer brièvement.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} = \lim_{n\to\infty} S_n = A = \ln 2 \cong 0,69$$

En effet ...

2