Collège de Saussure Examen semestriel de mathématiques de 4e année, niveau normal	
Date	9 décembre 2014
Durée	190 minutes
Maîtres, cours et nombre d'élèves	Jean-Marie Delley 4Ma1.DF03 (23 élèves) et 4Ma1.DF05 (24 élèves)
Nombre de pages	14
Impression	recto-verso, noir-blanc
Nombre d'exercices	8
Documents et matériel autorisés	personnels : calculatrice TI30, TI34 ou modèle équivalent (non graphique, non programmable) ; table numérique non annotée
Consignes	• **Répondre directement sur les feuilles d'énoncé.** • La présentation doit être soignée, l'écriture lisible. • Toutes les réponses doivent être justifiées par un raisonnement ou un calcul. • Tous les calculs doivent figurer sur les feuilles d'énoncé.

Nom : ....**Prénom** : ....

Groupe: ....**Cours** : ....

Points obtenus: ....**Note**: ....

Répartition des points

Exercice 1 : 14 points

Exercice 2 : 10 points

Exercice 3 : 14 points

Exercice 4 : 6 points

Exercice 5 : 9 points

Exercice 6 : 5 points

Exercice 7 : 9 points

Exercice 8 : 14 points

Notations : 3 points

Total : 84 points

Exercice 1 (environ 14 points)

Pour chaque fonction ci-dessous, déterminer une primitive en donnant une réponse ne contenant aucun exposant négatif ou fractionnaire et sous la forme la plus simplifiée possible :

(a) $f(x) = 2x\sqrt{x}$

(b) $f(x) = 4x^3 \cdot \sqrt{x^4 + 3}$

(c) $f(x) = \dfrac{2x^3}{(x^4+3)^5}$

(d) $f(x)=\dfrac{x^4+3}{2x^3}$

(e) $f(x)=\dfrac{2x^3}{x^4+3}$

Exercice 2 (environ 10 points)

Calculer la valeur exacte des intégrales suivantes et donner le résultat sous forme exacte et réduite le plus possible :

(a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)dx$

(b) $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{1}{3x}\,\mathrm{d}x$

(c) $\displaystyle\int_{-4}^{4} |x+1|\,\mathrm{d}x$

Exercice 3 (environ 14 points)

On considère la fonction *f* définie par $f(x)=e^{-x}$.

(a) Déterminer la primitive *F* de *f* définie telle que *F*(0) = 0.

(b) Esquisser *f* et *F* dans le même repère ci-dessous, en faisant apparaître les éléments clés :

(c) Représenter graphiquement dans le même repère la primitive *G* de *f* telle que *G*(0) = 2.

On considère maintenant la surface S délimitée par la représentation graphique de f, les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$ et l'axe Ox.

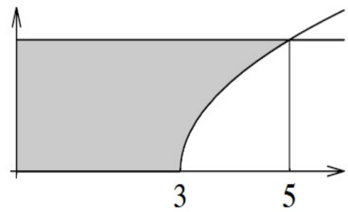
(d) Calculer l'aire de S. Donner un résultat exact et approché au centième.

On considère maintenant la représentation graphique de f entre les points $(-1\ ; f(-1))$ et $(0\ ; f(0))$ et on la fait pivoter autour de l'axe Ox. On obtient un volume de révolution.

(e) Calculer ce volume.

Exercice 4 (environ 6 points)

On considère la surface délimitée dans le premier quadrant par les axes de coordonnées et les courbes des fonctions f et g définies par $f(x)=\sqrt{2x-6}$ et $g(x)=2$ (voir ci-contre).



Calculer le volume de révolution engendré par la rotation de cette surface autour de l'axe Ox.
Donner un résultat exact et approché au centième.

Exercice 5 (environ 9 points)

Vrai ou faux? Justifier.

Vous pouvez si nécessaire utiliser un contre-exemple vu en cours, mais il est demandé d'expliciter en détail les calculs nécessaires.

(a) Si $f(x) > 0$ pour tout x réel, alors $\int_0^x f(t)\,dt>0$ pour tout x réel.

(b) La fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ possède une primitive.

(c) Soit F la fonction définie par $F(x)=\int_0^x \frac{1}{(t^2+1)^{100}}\,dt$. Alors F est strictement décroissante sur R.

Exercice 6 (environ 5 points)

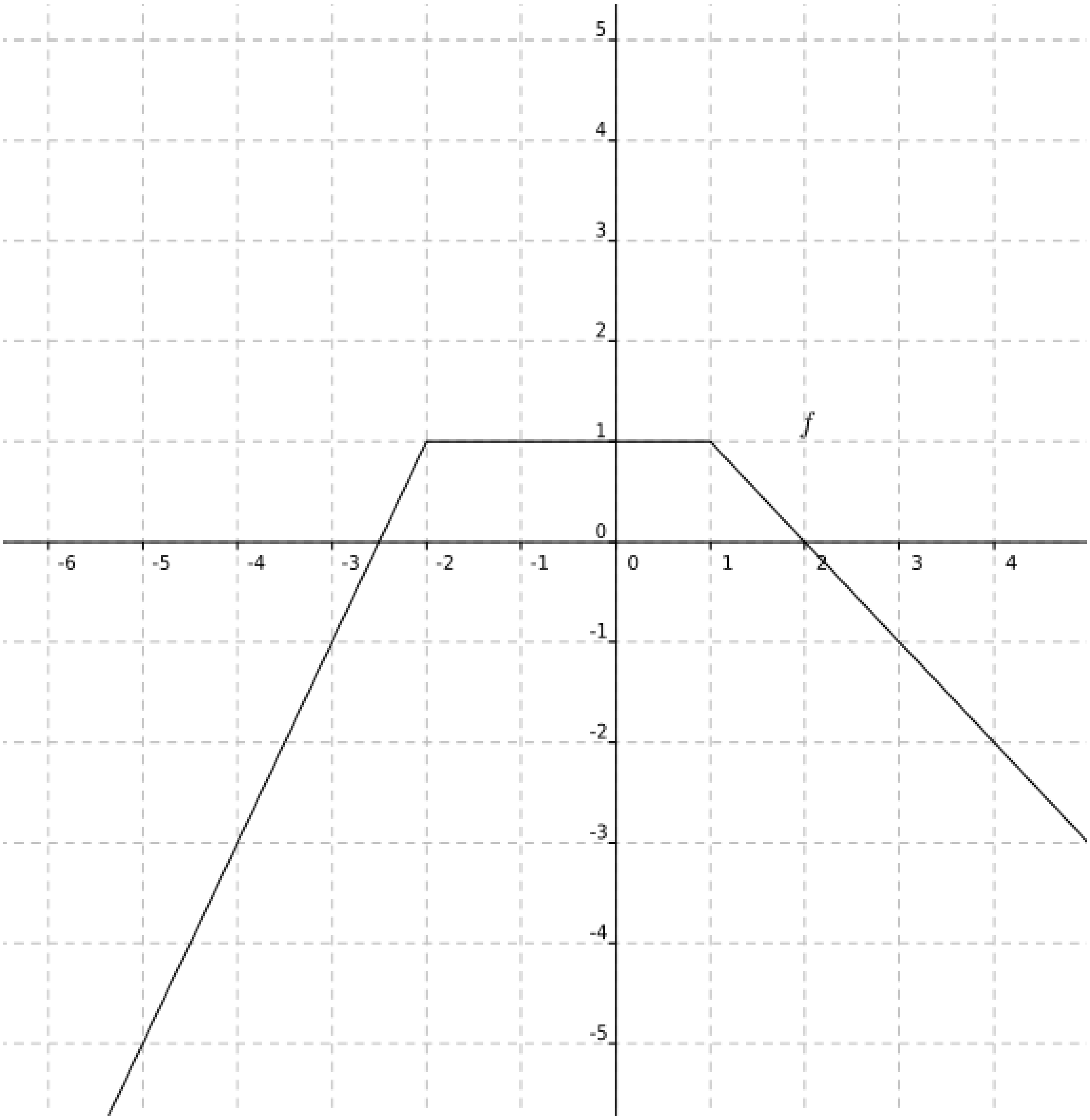
Soit F et G les fonctions réelles définies par $F(x)=\cos^2(x)$ et $G(x)=-\sin^2(x)$.

(a) Montrer que F et G sont deux primitives d'une même fonction.

(b) Déterminer la constante qui les différencie. Justifier.

Exercice 7 (environ 9 points)

On considère une fonction *f* donnée par une représentation graphique.



(a) Représenter graphiquement sur ce même repère et sur l'intervalle [-4;4] la fonction F définie $F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)\,dt$.

(b) Représenter graphiquement sur ce même repère et sur l'intervalle [-4;4] la primitive G de f qui s'annule en $x = 1$.

Exercice 8 (environ 14 points)

On considère la fonction *f* définie sur [1 ; 2] par $f(x)=\frac{1}{x}$, et *D* la surface délimitée par une représentation graphique de *f*, l'axe O*x* et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

(a) Représenter graphiquement cette surface en la hachurant au crayon gris (unité = 10 carrés).

Partie A : On considère un partage de l'intervalle [1 ; 2] en 5 sous-intervalles équidistants.

(b) Déterminer la longueur Δx de chaque sous-intervalle et les valeurs de x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 et x_5 .

(c) Représenter sur le même repère qu'en (a) les petites et grandes sommes de Riemann en identifiant clairement chacune d'entre-elles par une couleur spécifique.

(d) Calculer ces grandes et petites sommes et donner les résultats approchés au millième.

(e) Déduire de (d) un encadrement de l'aire de *D*.

Partie B : On considère maintenant un partage de l'intervalle [1 ; 2] en n sous-intervalles égaux.

(f) Déterminer la longueur Δx de chaque sous-intervalle et les valeurs de $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$.

(g) Montrer que la hauteur du premier petit rectangle (de base $[x_0 ; x_1]$) est égale à $\frac{n}{n+1}$.

(h) Montrer que la petite somme de Riemann vaut $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}$

N'essayez pas de calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+...+\frac{1}{2n}$, mais déterminer la valeur exacte de l'aire de D en utilisant une autre démarche (plus directe !).

(i) Pouvez-vous en déduire la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+...+\frac{1}{2n}$?
Expliquer brièvement.