Travail intermédiaire de mathématiques n°2

<table>
<tr><td>
Date : 28 novembre 2014
Durée : 90 minutes
Enseignant : Jean-Marie Delley
Cours : 4Ma1DF03
Nom: ....
Prénom: ....
Groupe: ....
</td>
<td rowspan="2">
Informations chiffrées après correction du maître
Notations (une coche par faute) :
Fautes : → .... / ....
Français (une coche par faute) [bonus] :
Fautes : → .... / ....

Total des points des exercices : .... / ....

Total des points de l'épreuve : .... / ....

Note : / 6
</td></tr>
<tr><td>
Matériel autorisé
o Calculatrice personnelle non graphique et non programmable
o table numérique non annotée
Remarques
o La présentation doit être soignée, l'écriture lisible.
o Toutes les réponses doivent être justifiées par un raisonnement ou un calcul.
o Tous les calculs doivent figurer sur les feuilles d'énoncé.
</td></tr>
</table>

Répartition des points

Exercice 1 : 8 points

Exercice 2 : 8 points

Exercice 3 : 10 points

Exercice 4 : 8 points

Exercice 5 : 14 points

Exercice 6 : 14 points

Notations : 2 points

Français (bonus) : 2 points

Total : 64 points

Répondre exclusivement sur l'énoncé ; si nécessaire, joindre des brouillons

8

Exercice 1 (environ 8 points)

Pour chaque fonction ci-dessous, déterminer une primitive en donnant une réponse ne contenant aucun exposant négatif ou fractionnaire :

(a) $f(x)=\frac{x^2}{(x^3+1)^5}$ $= \frac{1}{3}\left[(x^3+1)^5 \cdot 3x^2\right]$

$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{3}\left[\frac{(x^3+1)^{-4}}{-4}\right] = \frac{1}{-12}(x^3+1)^{-4} = -\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{(x^3+1)^4}$

4

(b) $f(x)=\frac{\sin(3x)}{\cos(3x)}$ $= -\frac{1}{3}\left[\frac{-\sin(3x)\cdot 3}{\cos(3x)}\right]$

$\Rightarrow F(x) = -\frac{1}{3}\ln|\cos(3x)|$

4

Exercice 3 (environ 10 points)

Calculer la valeur exacte des intégrales suivantes et donner le résultat sous forme exacte et réduite le plus possible, puis sous forme approchée arrondie au centième :

/10

(a) $I = \int_0^4 3x\sqrt{9+x^2}\,dx$

$f(x) = \frac{3}{2}\left[(9+x^2)^{1/2} \cdot 2x\right]$

$\Rightarrow F(x) = \frac{3}{2}\left[\frac{(9+x^2)^{3/2}}{3/2}\right] = \cancel{\frac{2}{3}} \cdot \cancel{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{9+x^2}\right)^3$

$\Rightarrow I = \left(\sqrt{9+x^2}\right)^3 \Big|_0^4 = \left(\sqrt{25}\right)^3 - \left(\sqrt{9}\right)^3 = 5^3 - 3^3$

$= 125 - 27 = 98$

5

(b) $I = \int_1^2 \frac{15}{2-3x}\,dx$

$f(x) = \frac{15}{2-3x} = -5\left(\frac{-3}{2-3x}\right)$

$\Rightarrow F(x) = -5\ln|2-3x|$

$\Rightarrow I = -5\ln|2-3x| \Big|_1^2 = -5\ln|-4| - (-5\ln|-1|)$

$= -5\ln(4) + \underbrace{5\ln(1)}_{=0} = -5\ln(4) \cong -6{,}93$

5

Exercice 2 (environ 8 points)

Soit la fonction f définie par $f(x)=\frac{1x}{2}\exp(-4x^2)$.

(a) Déterminer toutes les primitives de f.

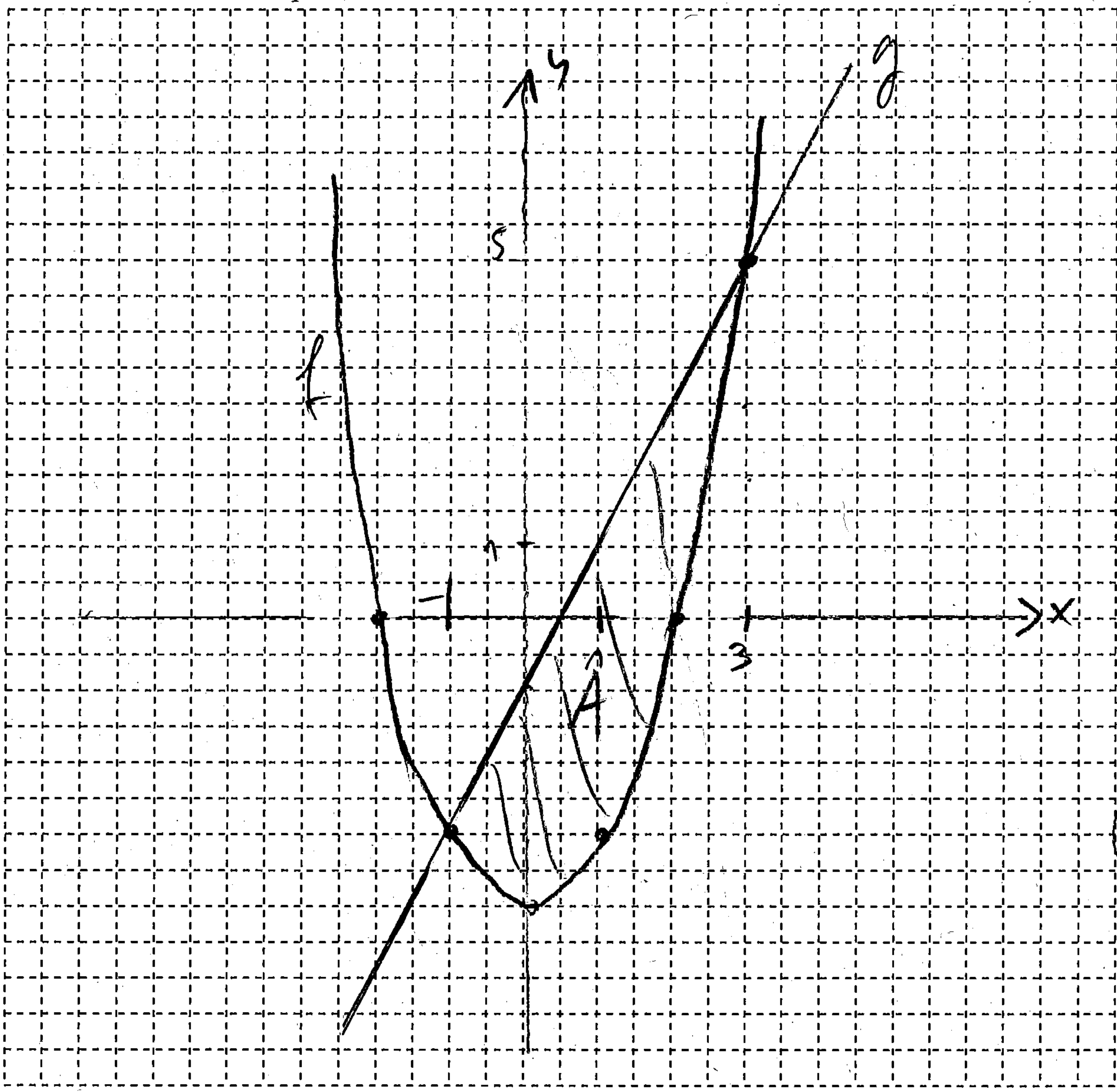
$$f(x)=-\frac{1}{16}\left[e^{-4x^2}\cdot(-8x)\right] \Rightarrow F(x)=-\frac{1}{16}e^{-4x^2}+C$$

(b) Déterminer la primitive F de f telle que que $F(0)=-1$

$$-\frac{1}{16}\underbrace{e^{-4\cdot 0^2}}_{=1}+C=-1 \Leftrightarrow C=-1+\frac{1}{16}=-\frac{15}{16}$$

$$F(x)=-\frac{1}{16}e^{-4x^2}-\frac{15}{16}$$

(b) Représenter graphiquement ces deux fonctions de façon à faire apparaître les éléments importants.



5

On considère la surface S délimitée par les courbes de f et g.

(c) Calculer l'aire de S et donner rép. sous forme exacte simplifiée au maximum

$$A = \int_{-1}^{3} g(x)-f(x)\,dx = \int_{-1}^{3} (2x-1)-(x^2-4)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{3} -x^2+2x+3\,dx = -\frac{x^3}{3}+x^2+3x\,\Big|_{-1}^{3}$$

$$= \left(\cancel{-\frac{27}{3}}+\cancel{9}+9\right)-\left(\frac{1}{3}+1-3\right) = 11-\frac{1}{3} = \frac{32}{3}$$

5

Exercice 4 (environ 8 points)

/8

Déterminer la valeur minimale et la valeur maximale que prend la fonction f déterminée par $f(x)=4\ln(-x)-2x^2$ pour $x\in\mathbb{R}_-^\times$

$f'(x) = 4\,\frac{1}{-x}(-x)' - 2(2x) = -\frac{4}{x}\cdot(-1) - 4x = \frac{4}{x} - 4x$ (2)

$= \frac{4-4x^2}{x} = \frac{4(1-x^2)}{x}$

x		-1		0		1	
$4(1-x^2)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$
x	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	//	//	//	//
$f(x)$	↗		↘				

(3)

la valeur maximale est atteinte pour $x=-1$

cette valeur vaut alors $f(-1) = 4\underbrace{\ln(1)}_{=0} - 2(-1)^2 = -2$ (2)

Il n'y a pas de valeur minimale (1)

Exercice 5 (environ 14 points)

/14

On considère les fonctions f et g définies par domaine compris entre les représentations graphiques des fonctions f et g définies par $g(x)=2x-1$ et $f(x)=x^2-4$.

(a) Déterminer algébriquement les points d'intersection de f et g.

$2x-1 = x^2-4 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0$

$\Leftrightarrow (x-3)(x+1)=0$

$x=3: \quad f(3)=5 \Rightarrow P_1=(3;5)$

$x=-1: \quad f(-1)=-3 \Rightarrow P_2=(-1;-3)$

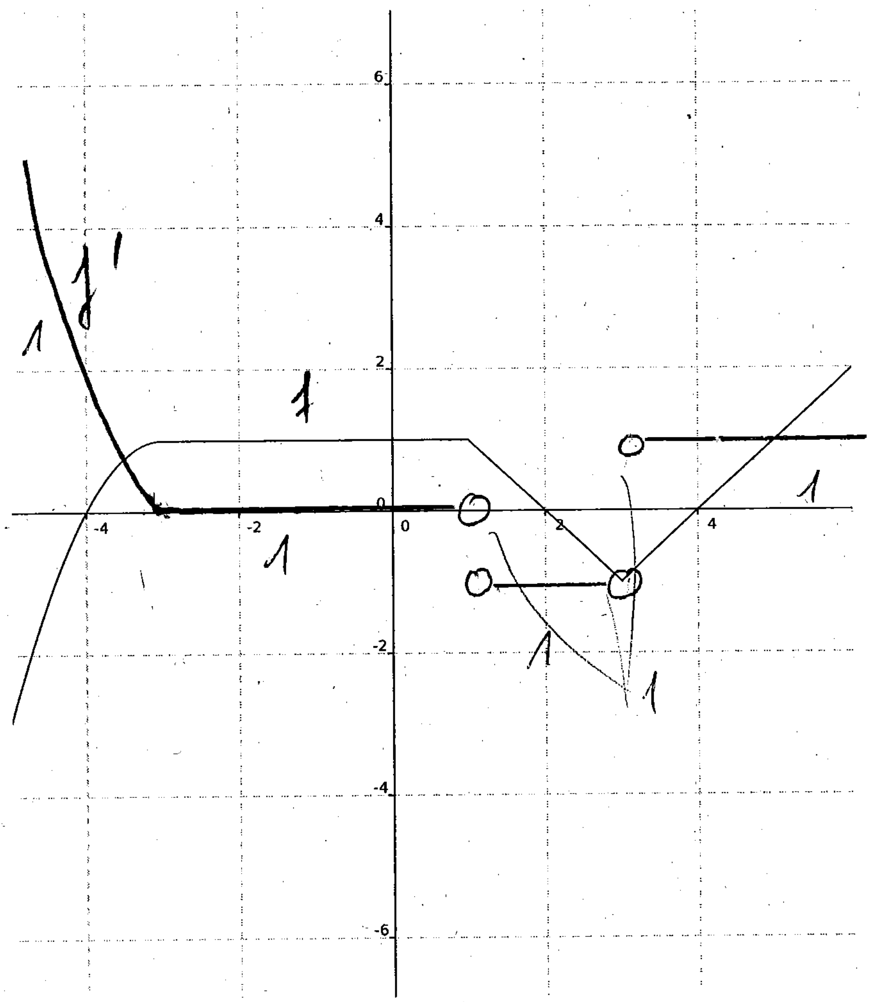
(4)

Exercice 6 *(environ 14 points)*

On considère une fonction f dont on ne connaît que la représentation graphique.

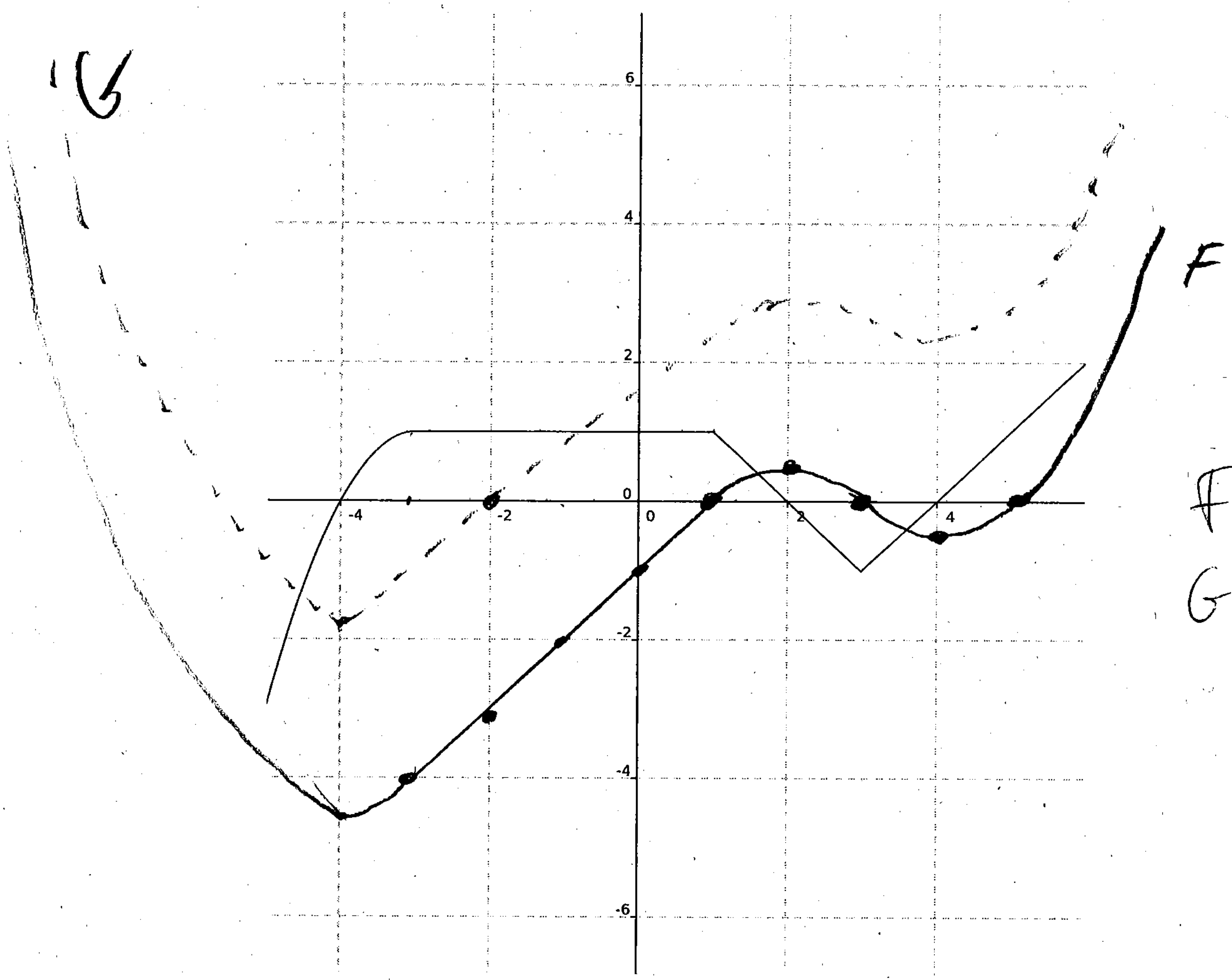
(a) Représenter graphiquement sur le repère ci-dessous la dérivée de f ; on ne demande pas une précision extrême mais de faire apparaître les éléments clés :

/14



5

(b) Représenter graphiquement sur le repère ci-dessous les primitive F et G de f définies par $F(x)=\int_1^x f(t)\,dt$ et $G(x)=\int_{-2}^x f(t)\,dt$; on ne demande pas une précision extrême mais de faire apparaître les éléments clés :



F : 6,5
G : 3,5