Exercice 1 (environ 12 points)

On considère le théorème suivant :

Théorème : Si $ABCD$ est un quadrilatère quelconque, alors les points milieux de ses quatre côtés forment un parallélogramme.

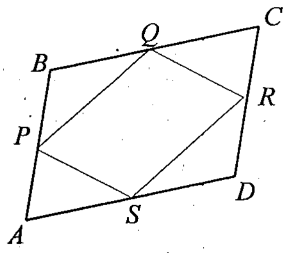
Dans la démonstration ci-dessous, remplir les [......] par ce qui convient :

Démonstration :

Soient S, P, Q et R les milieux respectifs de

[....[AD], [AB], [BC] et [CD]..........]

2



On a :

$$\overrightarrow{SP} = [\overrightarrow{SA}] + \overrightarrow{AP}$$
$$= \frac{1}{2}[\overrightarrow{DA}] + \frac{1}{2}[\overrightarrow{AB}]$$
$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB})$$
$$= \frac{1}{2}[\overrightarrow{DB}]$$
$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + [\overrightarrow{CB}])$$
$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}[\overrightarrow{CB}]$$
$$= [\overrightarrow{RC}] + \overrightarrow{CQ}$$
$$= [\overrightarrow{RQ}]$$

8

De même : $\overrightarrow{SR} = \overrightarrow{PQ}$.

D'où : $SPQR$ est un parallélogramme, car

[..par définition, un parallélogramme est une figure..........]
[..qui a deux côtés parallèles, ce qu'on vient de voir..]
[..]

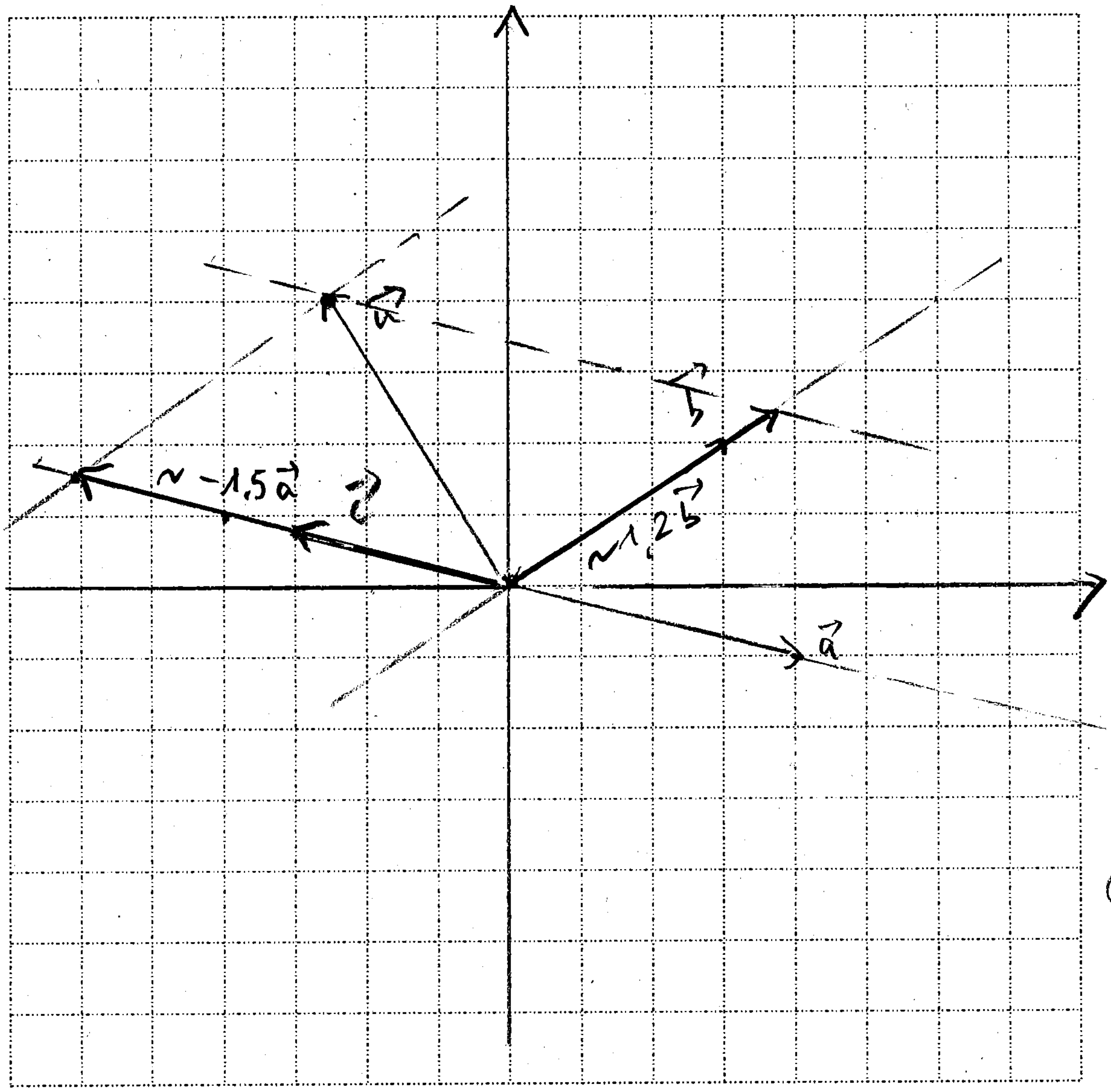
2

Exercice 2 (environ 19 points)

/ /19

Soit $\vec{a}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{b}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{c}\begin{pmatrix}-3\\0.75\end{pmatrix}$ des vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

(a) Exprimer géométriquement le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2,5\\4\end{pmatrix}$ sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.



3

Donner ici le résultat obtenu géométriquement :

$\vec{u} \cong (-1,5)\vec{a} + (1,2)\vec{b}$

1

(b) Exprimer algébriquement le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2,5\\4\end{pmatrix}$ sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$.

$$\begin{pmatrix}-2,5\\4\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ① \ -2,5 = 4\alpha + 3\beta \\ ② \ 4 = -\alpha + 2\beta \quad |4| \end{cases}$$

$$+ \quad 13,5 = 11\beta$$

$$\beta = \frac{13,5}{11} = \frac{27}{22} \cong 1,23$$

dans ②: $\alpha = 2\beta - 4 = 2\cdot\frac{27}{22} - 4 = \frac{27-44}{11} = -\frac{17}{11} \cong -1,55$

$$\vec{u} = \left(-\frac{17}{11}\right)\vec{a} + \left(\frac{27}{22}\right)\vec{b}$$

③

(c) Est-il possible d'exprimer le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-2,5\\4\end{pmatrix}$ sous la forme d'une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{c}$? Justifier.

Géométriquement : $\vec{a}$ et $\vec{c}$ ont l'air colinéaires ... dans ce cas on ne pourrait pas obtenir $\vec{u}$ – qui lui n'est manifestement pas colinéaire avec $\vec{a}$ et $\vec{c}$ – comme combinaison linéaire de $\vec{a}$ et $\vec{c}$ ...

vérif : $\vec{a}\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix} \overset{?}{=} \lambda\cdot\vec{c}\begin{pmatrix}-3\\0,75\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = -3\lambda \\ -1 = 0,75\lambda \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -4/3 \\ \lambda = -1/0,75 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -1,\overline{3} \\ \lambda = -1,\overline{3} \end{cases}$ ils sont colinéaires

Algébriquement :

$$\vec{u} \overset{?}{=} \alpha\vec{a} + \beta\vec{c} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-2,5\\4\end{pmatrix} \overset{?}{=} \alpha\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-3\\0,75\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ① \ -2,5 = 4\alpha - 3\beta \\ ② \ 4 = -\alpha + 0,75\beta \quad |4| \end{cases}$$

③

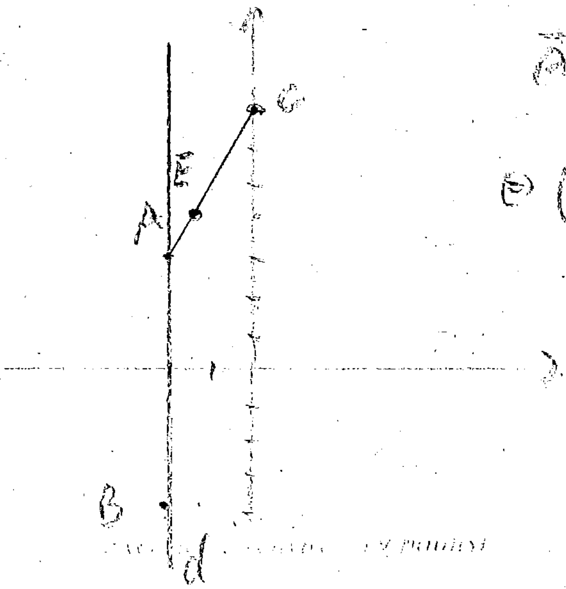
$$13,5 = 0\alpha + 0\beta \ !$$

$$13,5 = 0$$

L'impossible ; pas de sol pour α et β

On considère les points $A(-2;3)$, $B(-2;-4)$ et $C(0;7)$.

(d) Calculer les coordonnées du point E situé au quart (à partir de A) du segment $[AC]$



$\vec{AE} = \frac{1}{4}\vec{AC} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}0+2\\7-3\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\1\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x+2\\y-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/2\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}x+2=1/2\\y-3=1\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x=-1,5\\y=4\end{cases}$

$E=(-1,5;4)$ (5)

(e) Déterminer une équation vectorielle puis cartésienne de la droite d_1 passant par A et B.

$\vec{AB} = \begin{pmatrix}-2+2\\-4-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-7\end{pmatrix}$

$P(x;y)\in d \Leftrightarrow \vec{AP}=\lambda\vec{AB}$ avec $\lambda\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x+2\\y-3\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}0\\-7\end{pmatrix}$ éq. vect. de d

$\Leftrightarrow \begin{cases}x+2=0\\y-3=-7\lambda\end{cases}$

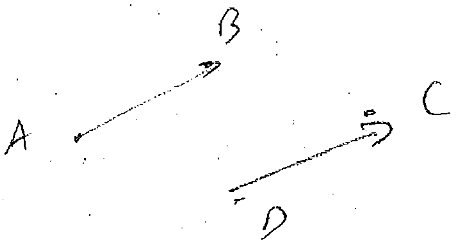
d'où $x+2=0$ éq. cart. de d (4)

Exercice 3 (environ 10 points)

(1/1)

Soient $A(3;-1;2)$, $B(4;4;-1)$, $C(8;5;-6)$ et $D(7;0-3)$ quatre points de $\mathbb{R}^3$.

(a) Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.



ABCD parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4-3 \\ 4+1 \\ -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8-7 \\ 5-0 \\ -6+3 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ ok

(4

Ou $\overrightarrow{AD} \overset{?}{=} \overrightarrow{BC}$

$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} ? \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$ ok

(b) Déterminer une équation vectorielle et une équation cartésienne du plan Π passant par A, B et C.

$P(x;y;z) \in \Pi \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = \alpha\overrightarrow{AB} + \beta\overrightarrow{AC}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-3 \\ y+1 \\ z-2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 4-3 \\ 4+1 \\ -1-2 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 8-3 \\ 5+1 \\ -6-2 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} ① \; x-3 = \alpha + 5\beta \\ ② \; y+1 = 5\alpha + 6\beta \\ ③ \; z-2 = -3\alpha - 8\beta \end{cases}$

$3\cdot① \; 3x-9 = 3\alpha + 15\beta$
$③ \; z-2 = -3\alpha - 8\beta$
$④ \; 3x+z-11 = 7\beta$

$-5\cdot① \; -5x+15 = -5\alpha - 25\beta$
$② \; y+1 = 5\alpha + 6\beta$
$⑤ \; -5x+y+16 = -19\beta$

$19\cdot④ : 57x+19z-209 = 7\cdot 19\beta$
$7\cdot⑤ : -35x+7y+112 = -7\cdot 19\beta$

$[22x+7y+19z-97=0]$ (6)

Exercice 4 (environ 6 points)

/6 Soient $A(0;2;3)$ et $B(-2;1;4)$ deux points de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les équations vectorielle et cartésiennes de la droite d passant par A et B.

$P(x;y;z) \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-0 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2-0 \\ 1-2 \\ 4-3 \end{pmatrix}$ éq. vect de d

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2\lambda \\ y-2 = -\lambda \\ z-3 = \lambda \end{cases}$ Syst éq. param de d

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{x}{2} \\ \lambda = -y+2 \\ \lambda = z-3 \end{cases}$

$\lambda = \left[-\frac{x}{2} = -y+2 = z-3\right]$

2 éq. cart de d

6